

Quantum Flatland

"O day and night, but this is wondrous strange"



Edwin A . A bbott (1838-1926)

2次元世界の電子たち

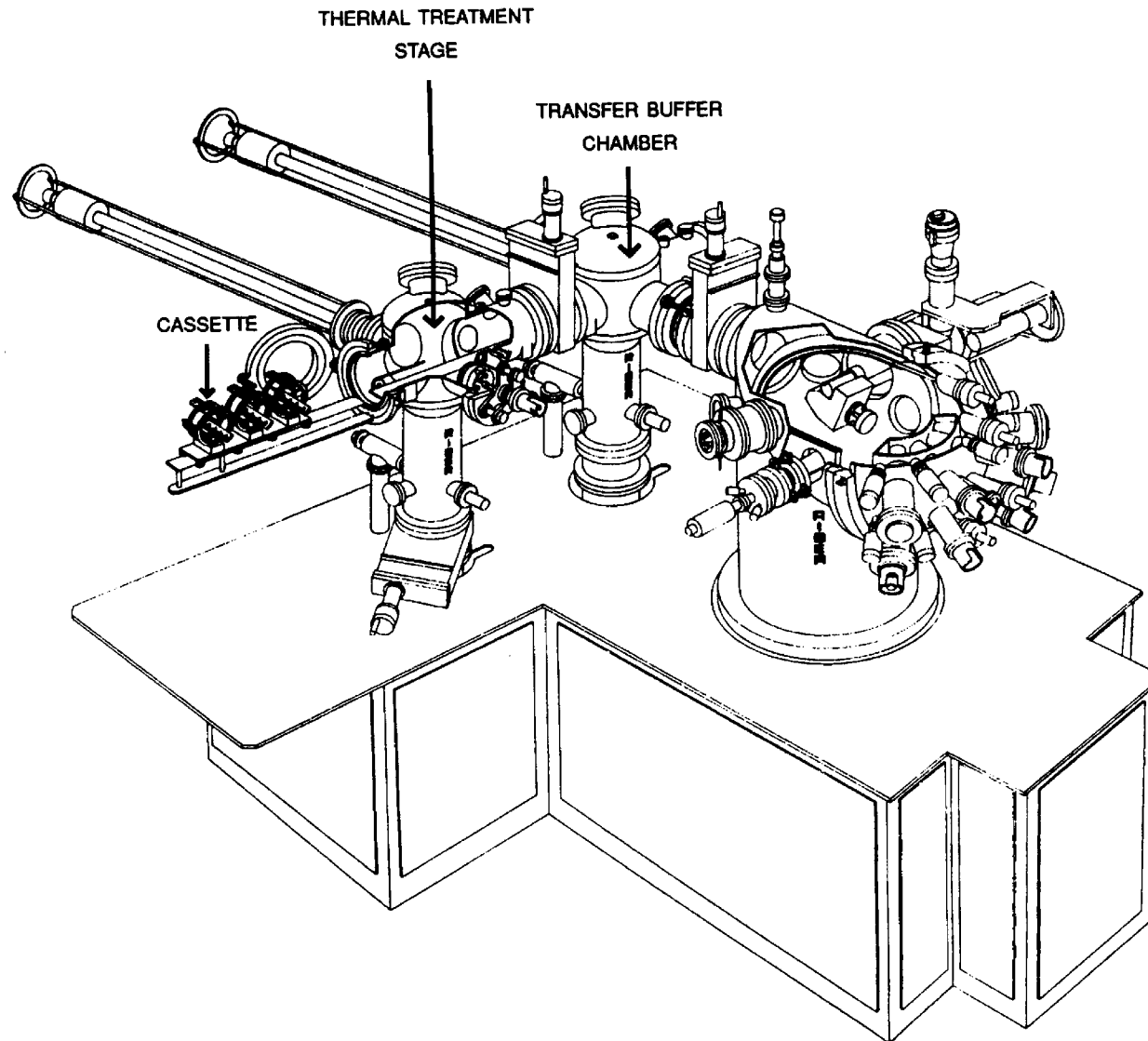
1999年7月10日 電力館科学ゼミナール

東京大学物性研究所 家 泰弘

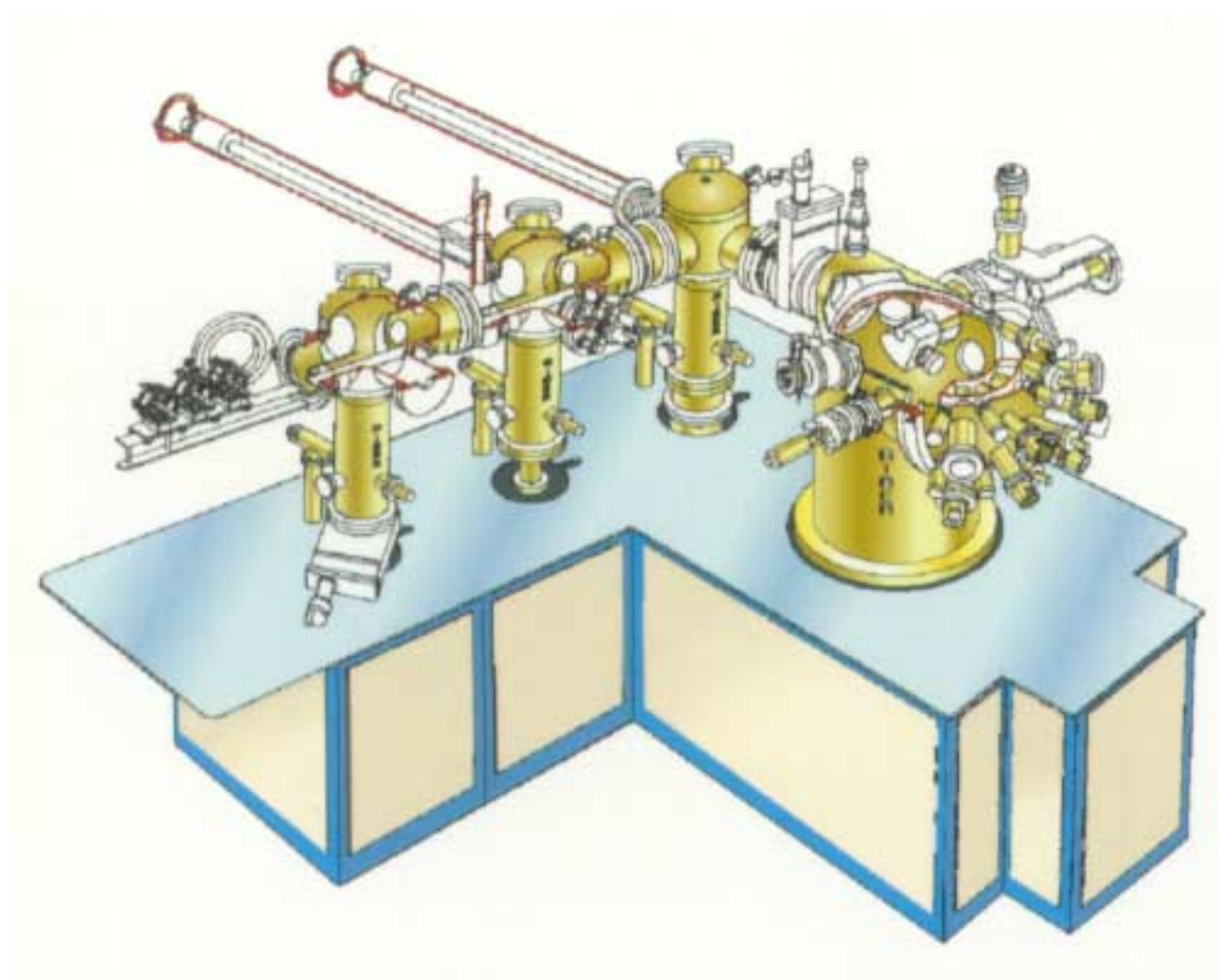
- ◆電気伝導について：金属・絶縁体・半導体
- ◆半導体ヘテロ構造：高移動度2次元電子
- ◆磁場中の電子：ホール効果, ランダウ量子化
- ◆量子ホール効果：電子局在
- ◆分数量子ホール効果：ラフリン状態
- ◆複合フェルミオン描像

なぜ2次元が特別か？

分子線エピタキシ装置 (Molecular Beam Epitaxy)



分子線エピタキシ装置 (Molecular Beam Epitaxy)



身近にある2次元電子系

◆ Si-MOS トランジスタ

(MOS：金属・酸化物・半導体)

パソコン等に使われているLSI

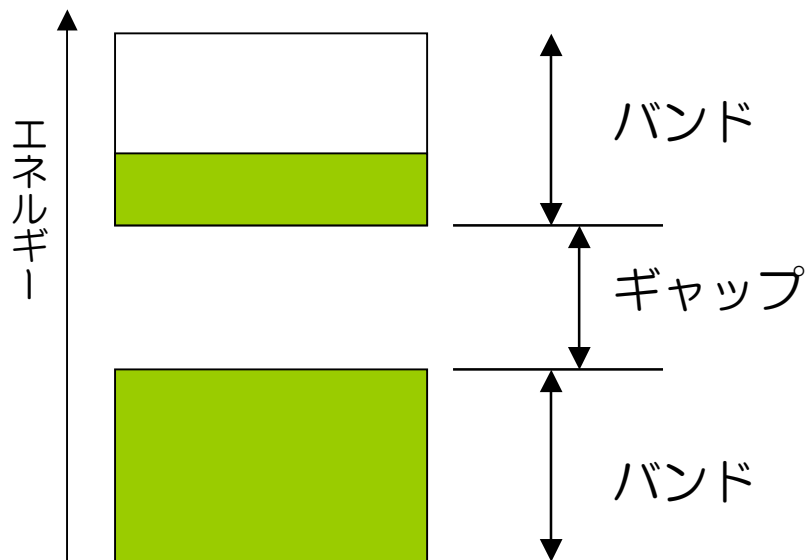
(LSI：大規模集積回路)

◆ GaAs/AlGaAs HEMT

(HEMT：高電子移動度トランジスタ)

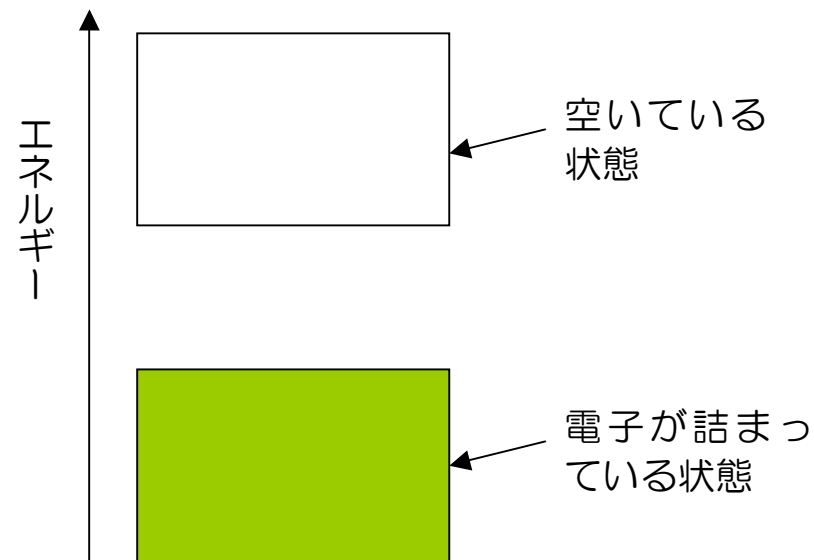
携帯電話，衛星放送

金属・絶縁体・半導体



金属

部分的に詰まっているバンドの電子は自由に動ける



絶縁体（半導体）

このようになっていると電子は身動きがとれない

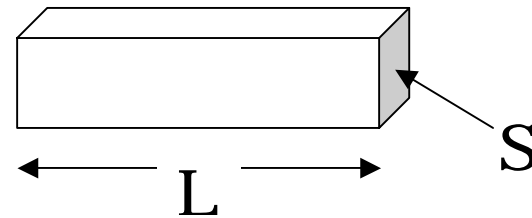
電気抵抗率

$$V = R I$$

電圧 = 抵抗 × 電流

オームの法則

$$R = \frac{V}{I}$$



$$\rho = \frac{E}{J} = \frac{V/L}{I/S} = R \frac{S}{L}$$

電気抵抗率 ($\Omega \cdot \text{cm}$)

電気伝導率

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

電気伝導率

$$J = \sigma E$$

$$J = n e v$$

$$\longrightarrow \sigma = n e \mu$$

電流密度 = 電子密度 × 電荷 × 速度

$$\mu = \frac{v}{E} \\ = \frac{e \tau}{m}$$

電子移動度 (電場によって電子がどのくらい速く走るか)

τ : 電子散乱時間

きれいな (不純物など乱れの少ない) 試料ほど散乱時間が長く高移動度が得られる。

平均自由行程

$$l = v_F \tau$$

電子が散乱を受けるまでにどのくらいの距

離走るか.

半導体へのドーピング

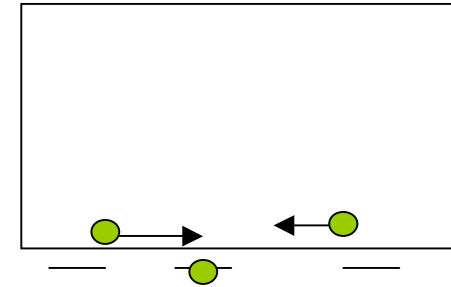
半導体に電子を供給するには

ドーピング（不純物添加）を行う。

例えば，GaAs に Si を微量添加することにより，動ける電子が生成される。

しかし添加した不純物原子は，走る電子に対して邪魔者（散乱体）となってしまう。

⇒ **高移動度を得る上でのジレンマ**



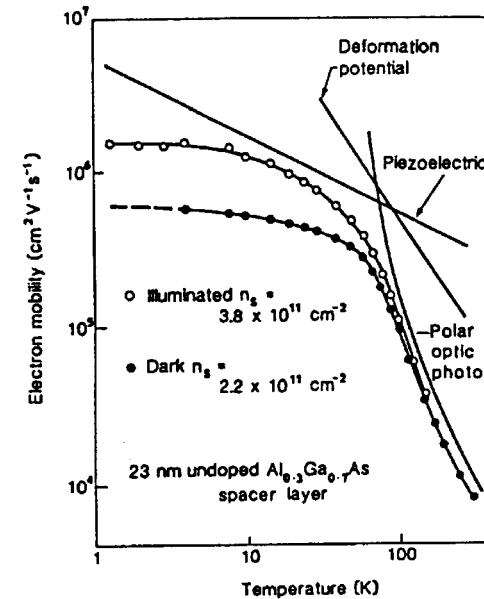
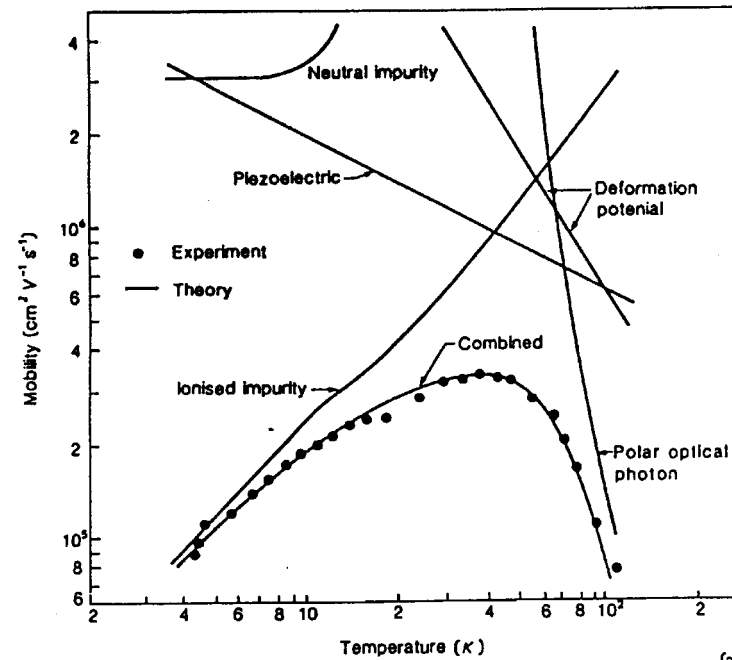
電子の散乱と移動度

GaAs における電子の散乱機構と電子移動度

- 格子振動（フォノン）による散乱
- イオン化不純物による散乱

バルク（3次元）の場合

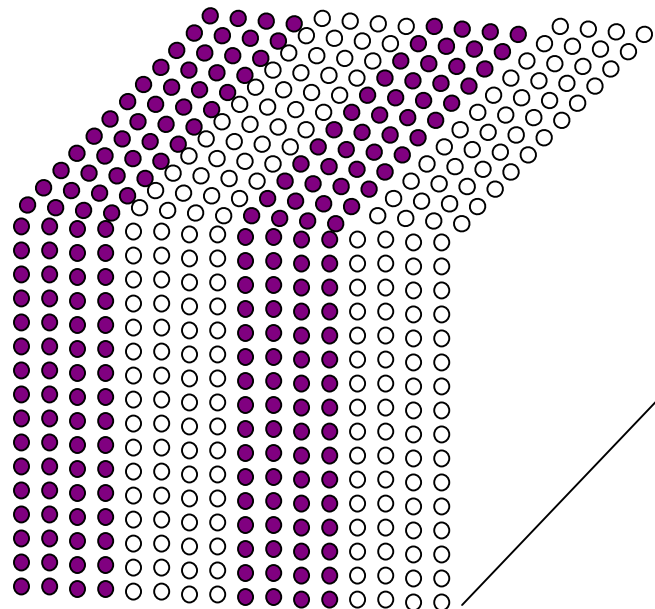
ヘテロ接合（2次元）の場合



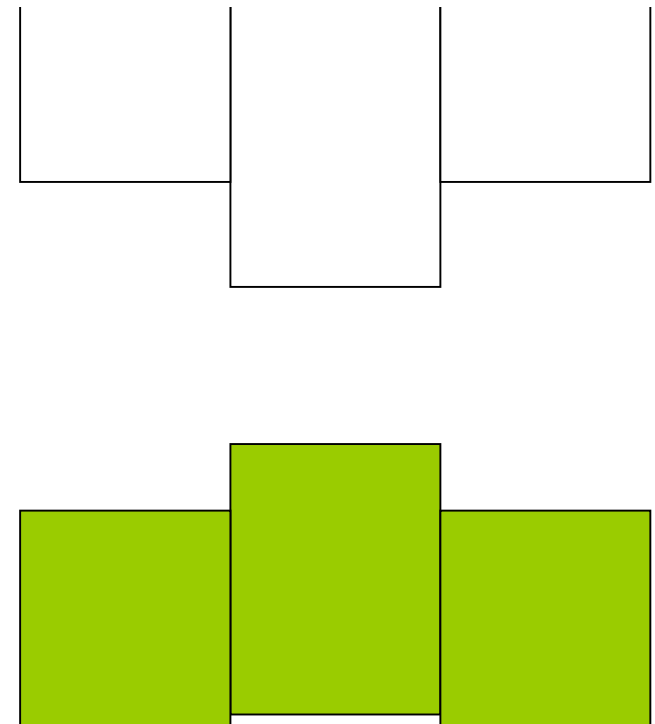
GaAs/AlGaAs ヘテロ構造

ヘテロ (異種) \Leftrightarrow ホモ (同種)

半導体ヘテロ構造：異種の半導体を原子レベルで継ぎ合わせた人工構造
超格子，量子井戸，単一ヘテロ接合など



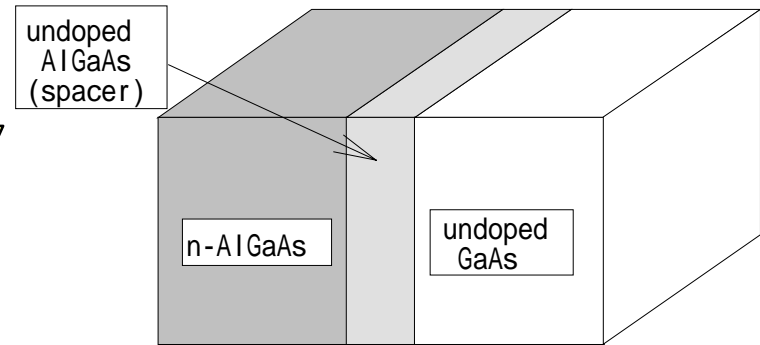
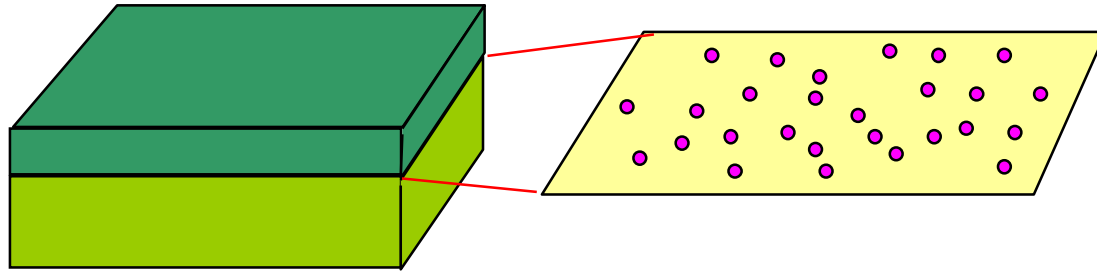
AlGaAs/GaAs/AlGaAs/GaAs



GaAs/AlGaAs

AlGaAs GaAs AlGaAs

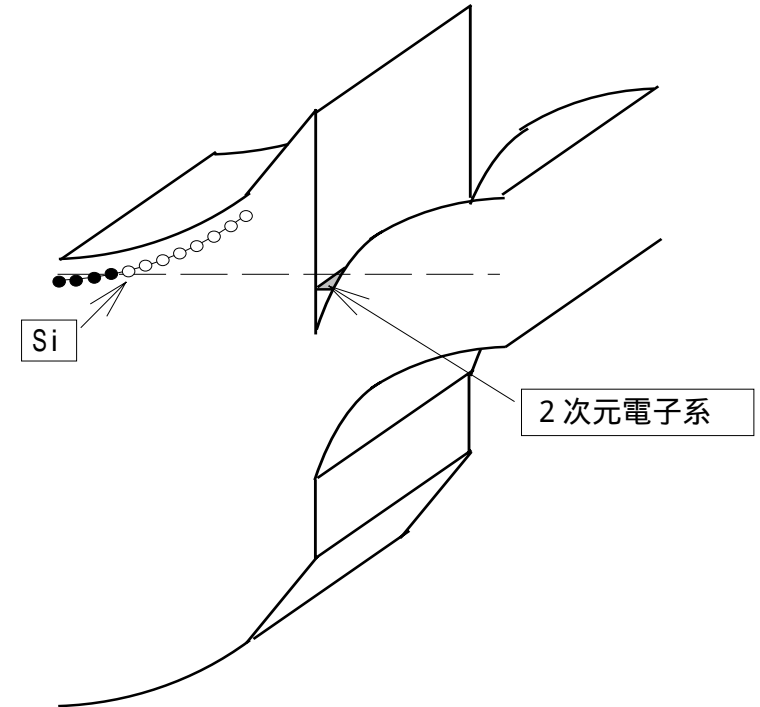
ヘテロ界面2次元電子系



選択ドーピング：電子が走行するところには不純物を入れないようにすることができる。

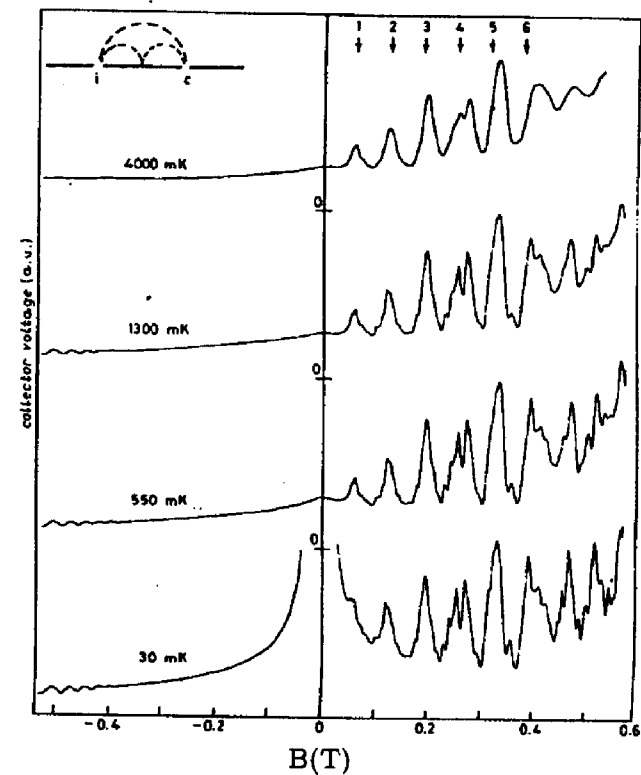
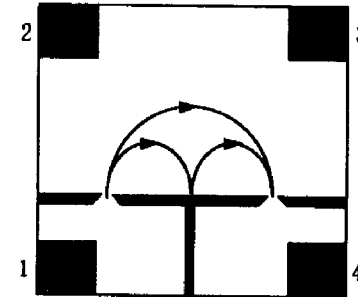
高移動度 $\mu \approx 10^7 \text{ cm}^2 / \text{Vs}$

平均自由行程 $l \approx 0.1 \text{ mm}$

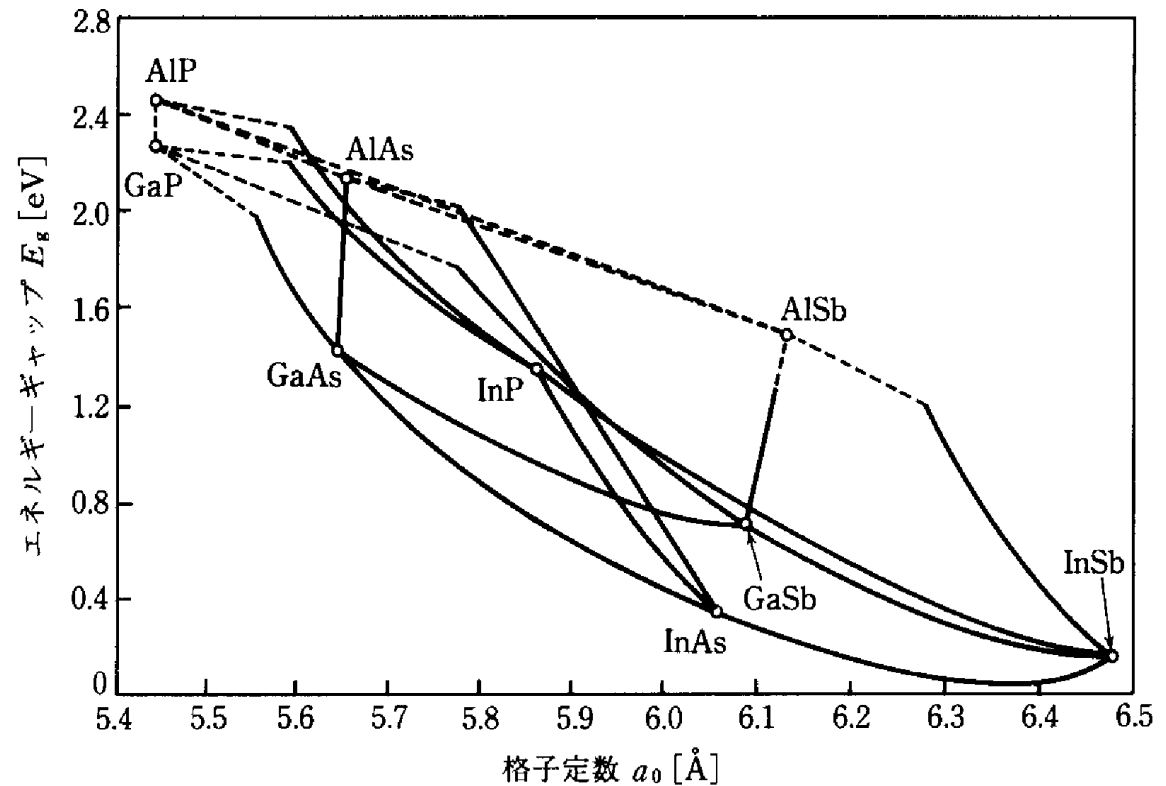


バリスティック(ballistic)伝導

- 高移動度試料では電子の平均自由行程が数 μm 以上になる。
- 微細加工技術を用いればこれよりも小さなスケールの構造を作ることは十分可能である。
- 平均自由行程の方が試料の特徴的な長さよりも長いような状況を**バリスティック**と呼ぶ



ヘテロ接合

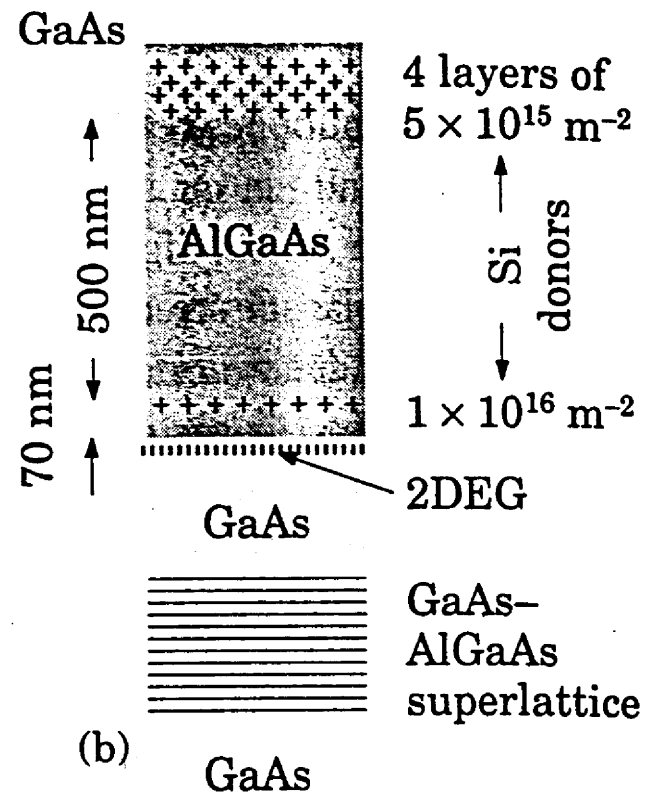
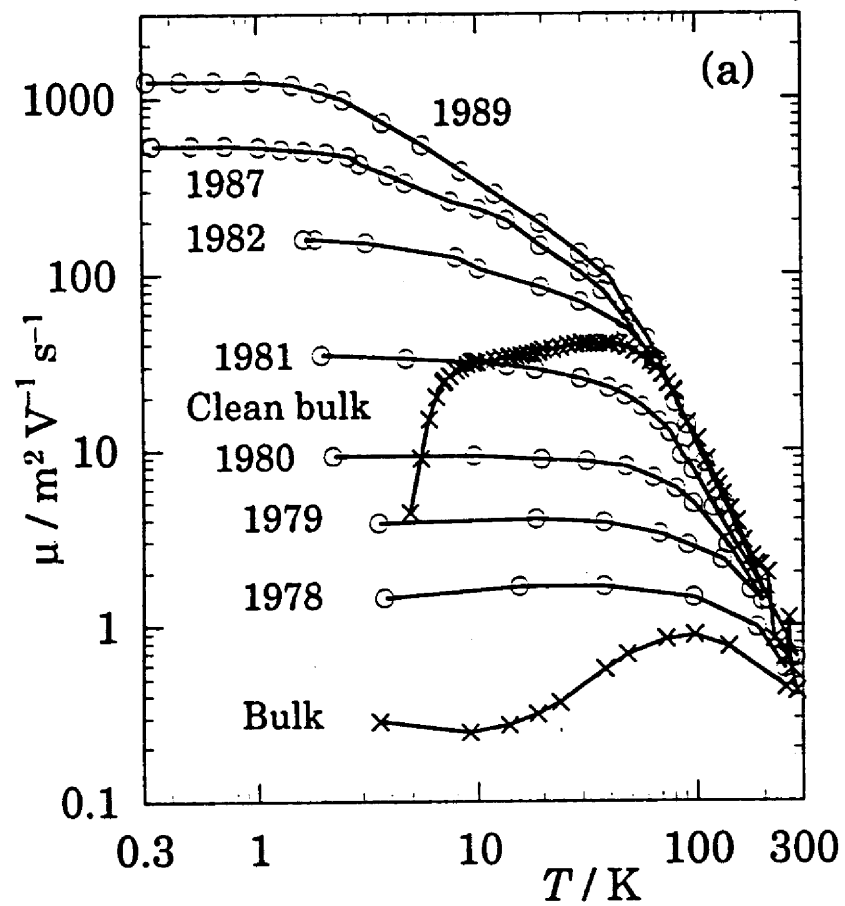


- 界面に歪みが発生しないように、格子定数が良く一致した物質の組み合わせを選ぶ： **格子整合**
- GaAs/AlGaAs はほぼ理想的。
- ヘテロ構造を利用した**人工物質**の研究は半導体ばかりでなく、

金属や酸化物など他の多くの物質についても広く行われている。

高移動度の追求

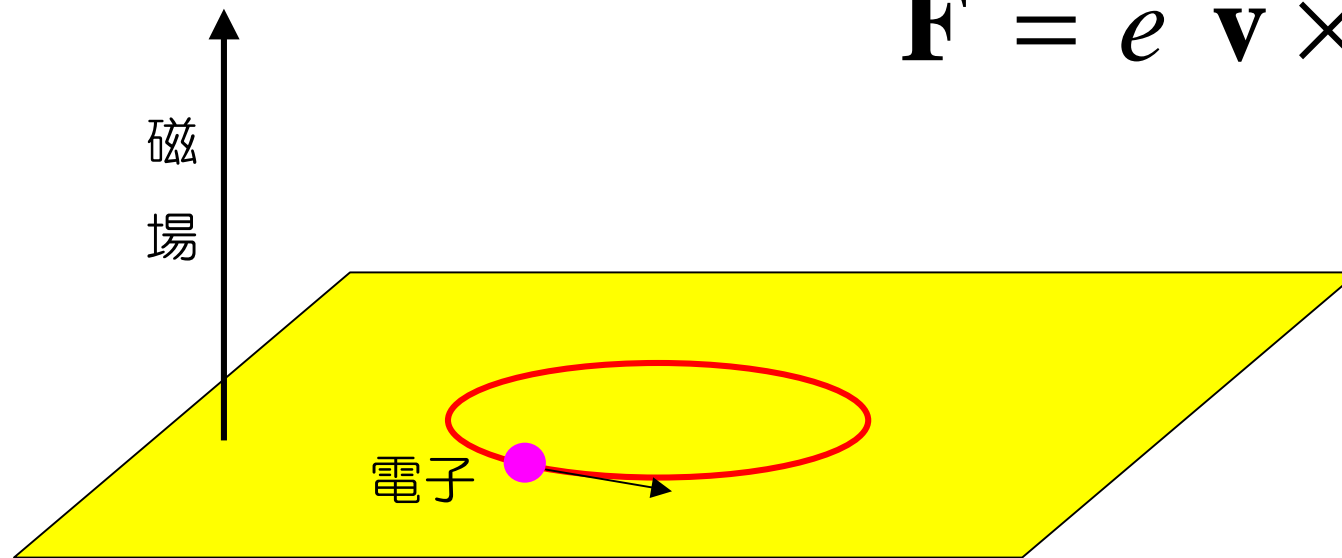
超高真空極限清浄環境での GaAs/AlGaAs 結晶成長：
分子線エピタキシー装置，選択ドーピング／スペーサー層



磁場中の電子の運動

運動する電子にはローレンツ力(リョク)が働く

$$\mathbf{F} = e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

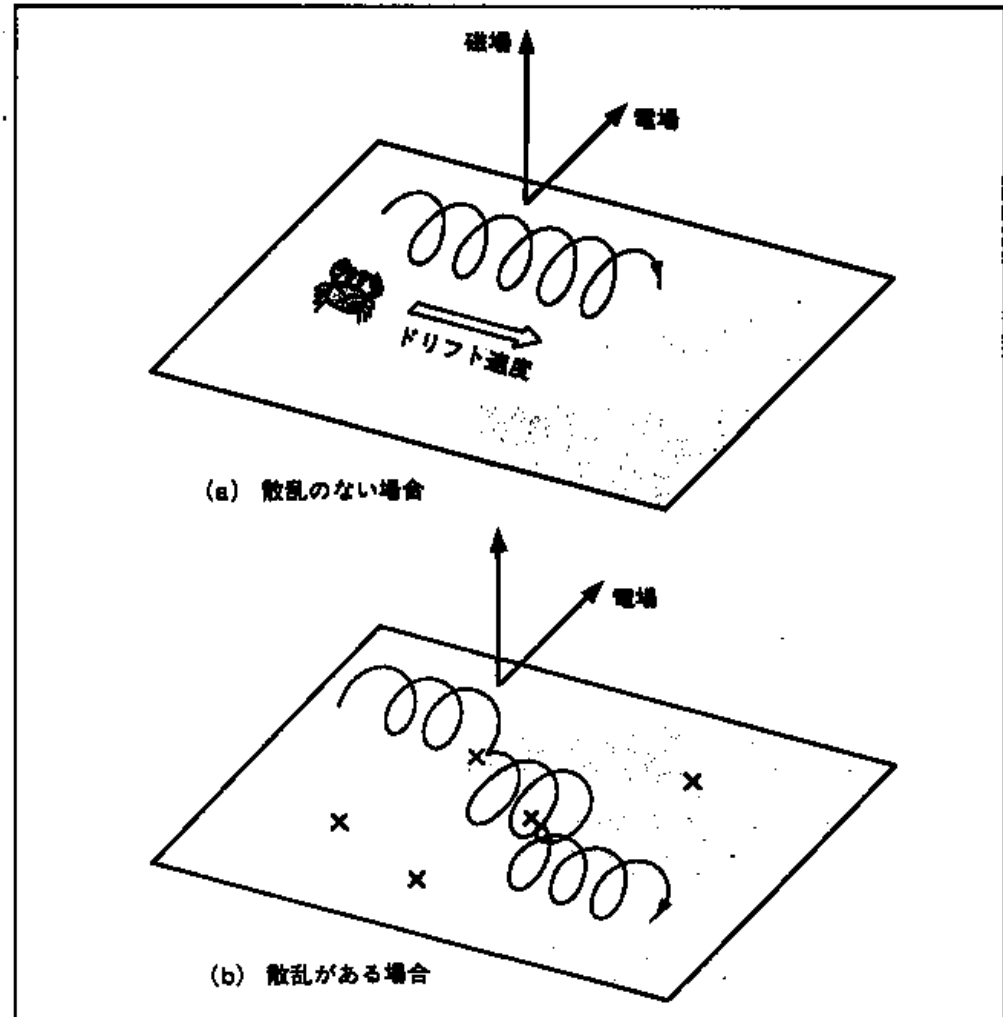


サイクロトロン円運動

電場と磁場がある場合の電子の運動

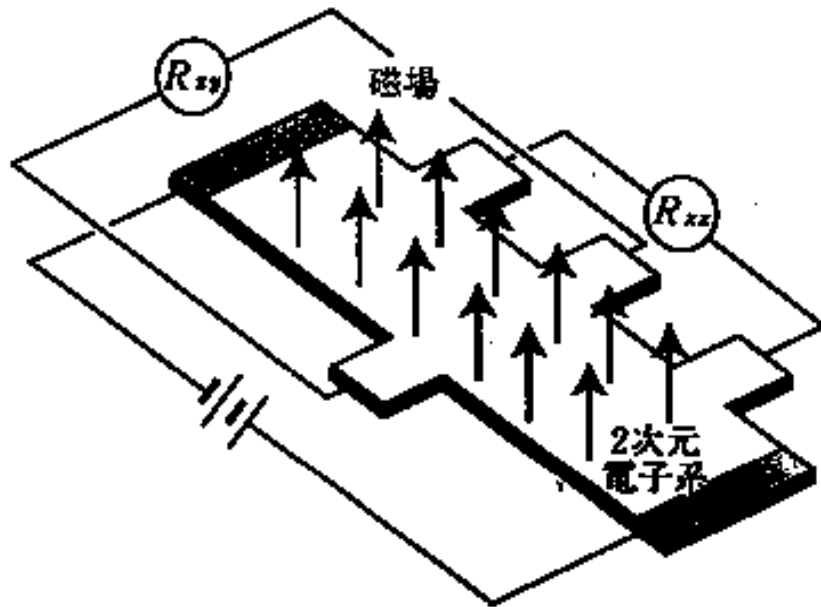
散乱が無ければ電子は電場と磁場にともに垂直な方向に運動する（ドリフト運動）。

散乱があると電場方向の電流が生じる。



電気抵抗とホール効果

E. H. Hall (1879)



$$e \mathbf{E} = e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$R_H = \frac{E}{J B} = \frac{E}{nev B}$$
$$= \frac{1}{ne}$$

ローレンツ力とホール電場との釣り合い

ホール係数を測定すると電子の数がわかる

磁場によるランダウ量子化

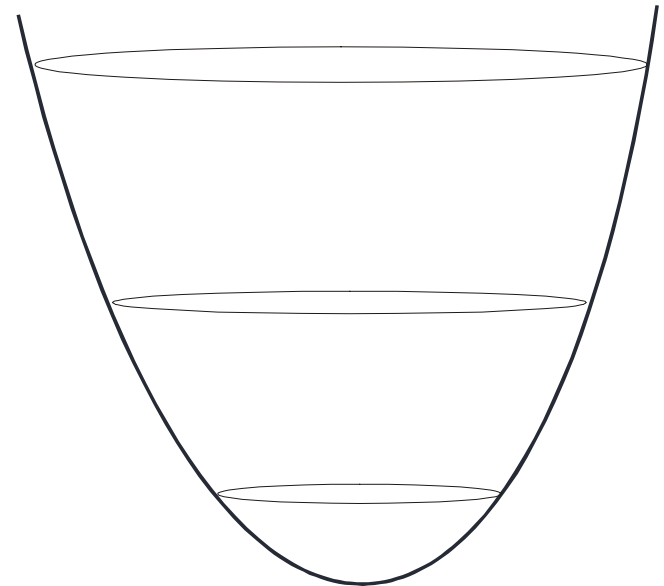
サイクロトロン円運動の半径は

$$R_c = \sqrt{2N + 1} \ell$$

$$\ell = \sqrt{\hbar / eB}$$

$$E = \frac{1}{2} m \omega_c^2 R_c^2$$

$$= \left(N + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c \quad \omega_c = \frac{eB}{m}$$

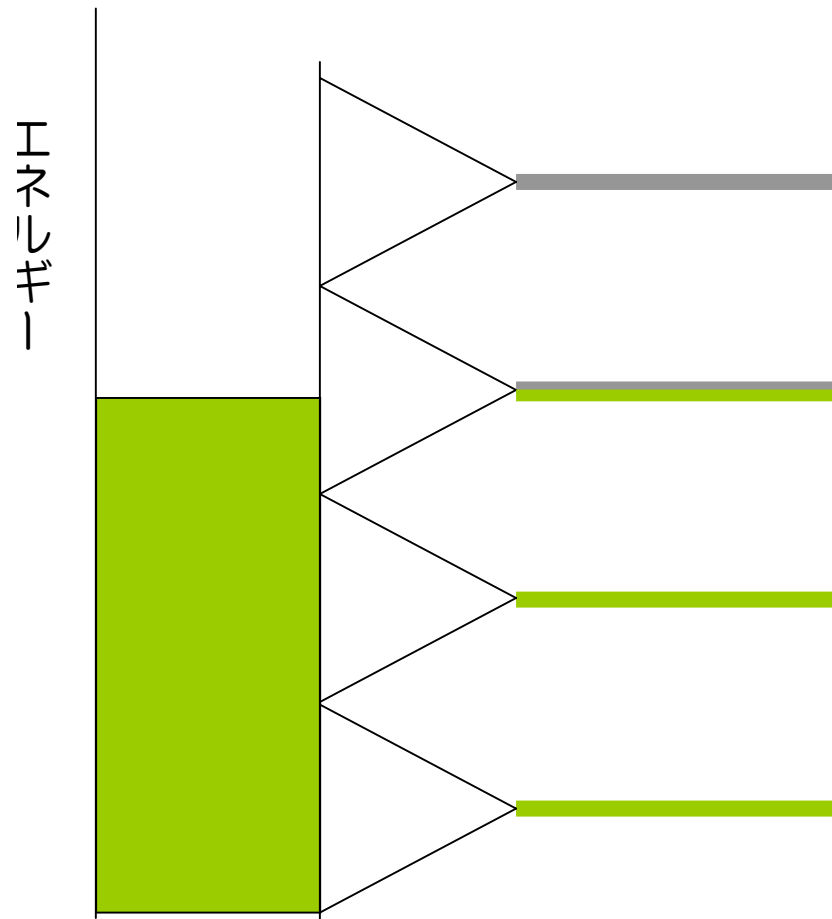


電子の運動エネルギーは

に量子化される (飛び飛びの値をとる)

磁場中の2次元電子系

1つのランダウ準位に収容可能な電子の数（ランダウ縮重度） $= eB/h$



充填率

$$\nu = n / \frac{eB}{h} = n / \frac{B}{\phi_0}$$
$$= N / M \quad \phi_0 = \frac{h}{e}$$

= 電子の数 / 磁束量子の数

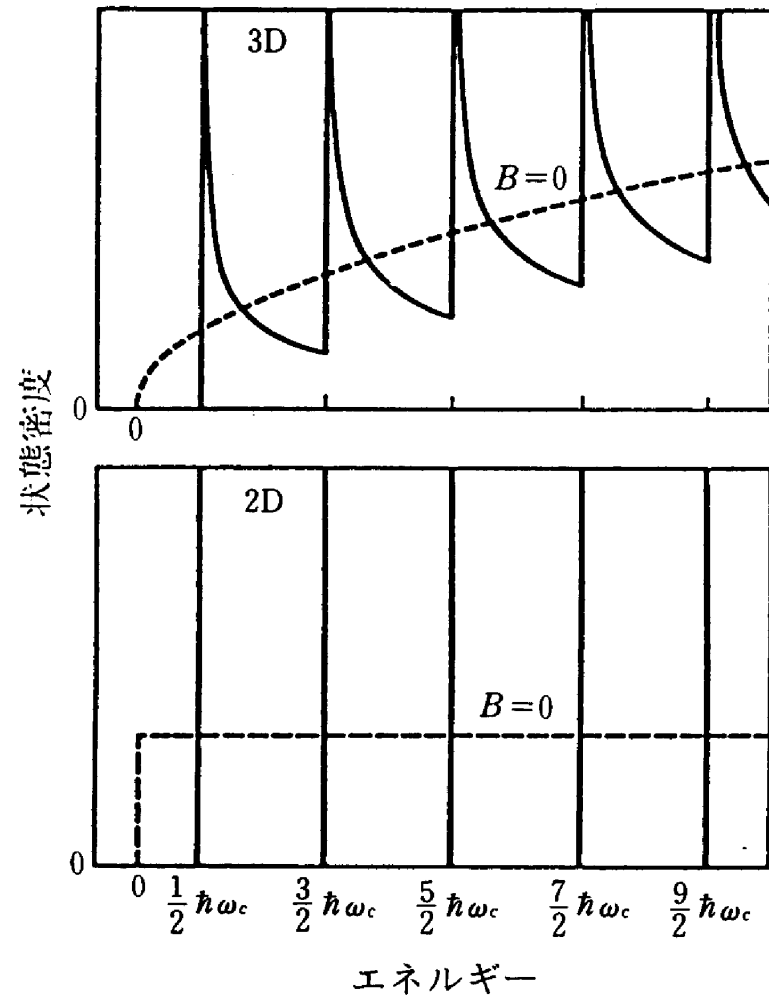
ランダウ・サブバンド

電子のエネルギー準位は離散的なランダウ準位に分かれる。

フェルミエネルギーのところの状態密度が磁場に対して周期的に変化する。

磁気量子振動効果

(シュブニコフ・ドハース振動)



量子ホール効果

電子が ν 番目のランダウ準位までをちょうど詰めた場合

$$n = \nu \frac{eB}{h}$$

$$\rho_{xy} = \frac{B}{ne} = \frac{B}{\nu(eB/h)e} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}$$

$$\frac{h}{e^2} = 25.812807 \text{ k}\Omega$$

量子ホール定数

しかし、これは ν 番目のランダウ準位までちょうど詰まるように電子密度または磁場を精密に調節したときにホール抵抗が特別な値を採っているに過ぎない。

量子ホール効果

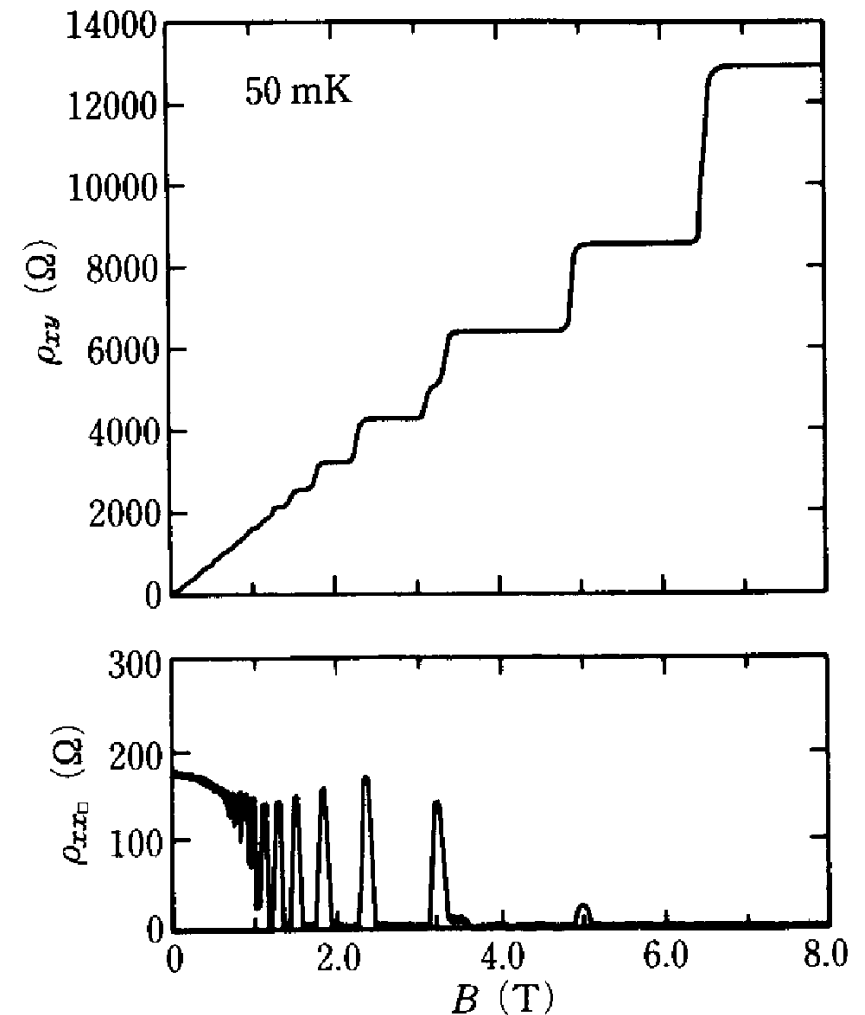
ν の値が整数から少しずれたところでもホール抵抗の量子化が起こっている。

ホールプラトー（平坦部）

そこでは縦抵抗はゼロ。

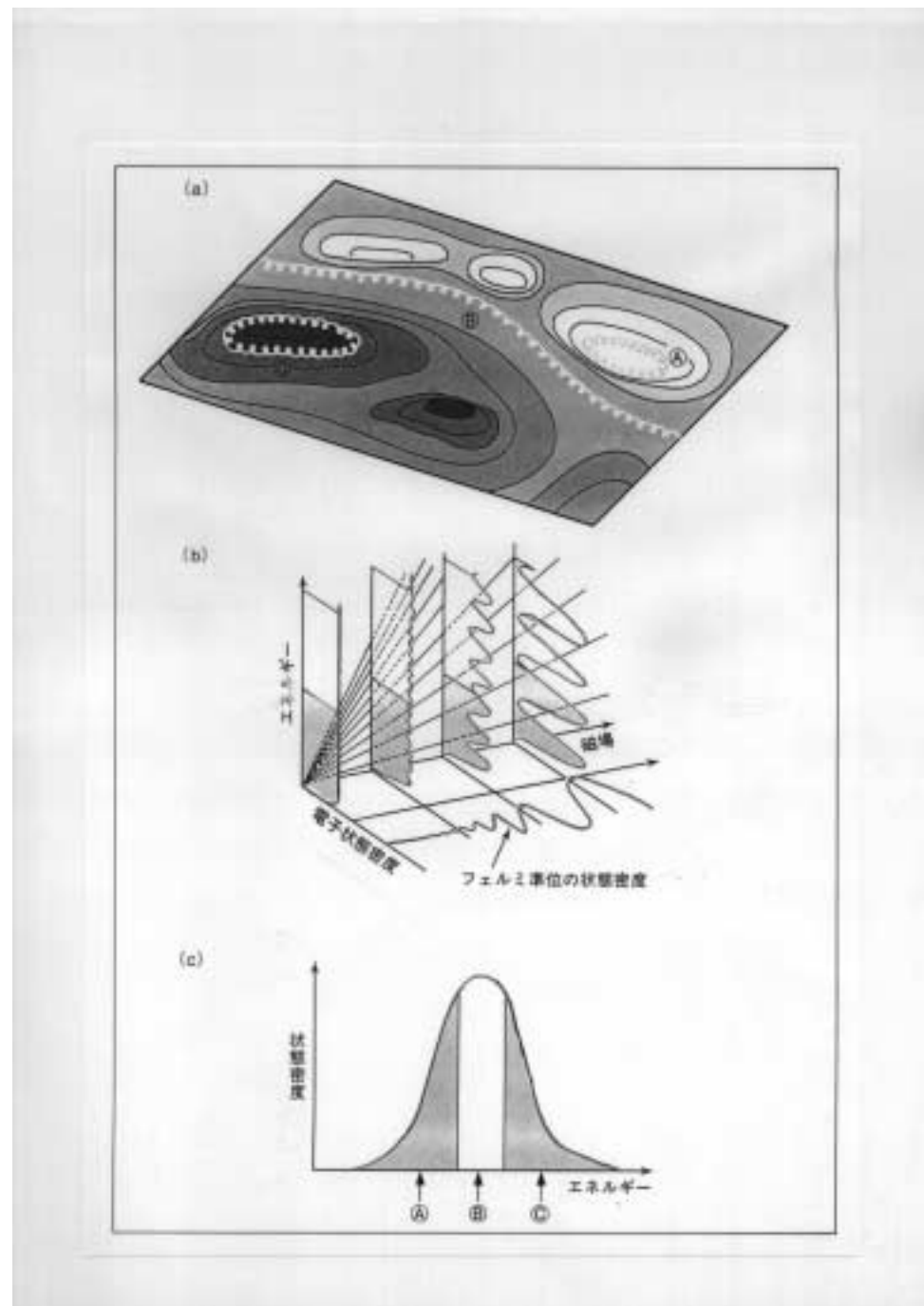
$$\rho_{xy} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}, \quad \rho_{xx} = 0$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} = 0 \\ \sigma_{xy} = \frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} = \nu \frac{e^2}{h} \end{array} \right.$$

GaAs/AlGaAs 2次元電子系の磁気抵抗とホール抵抗



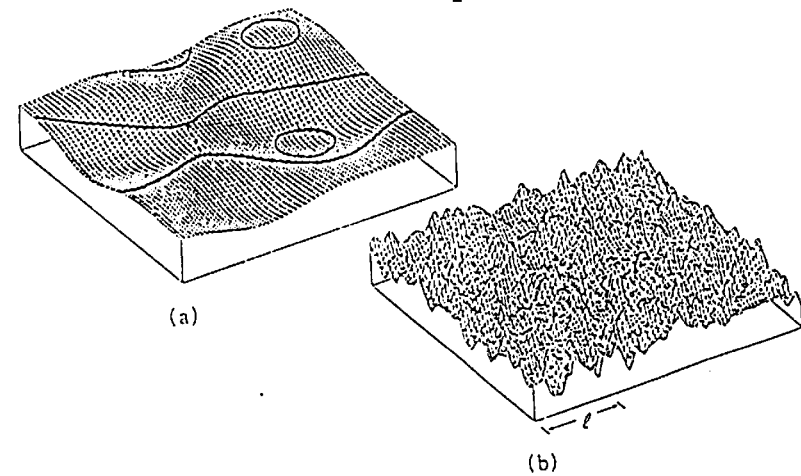
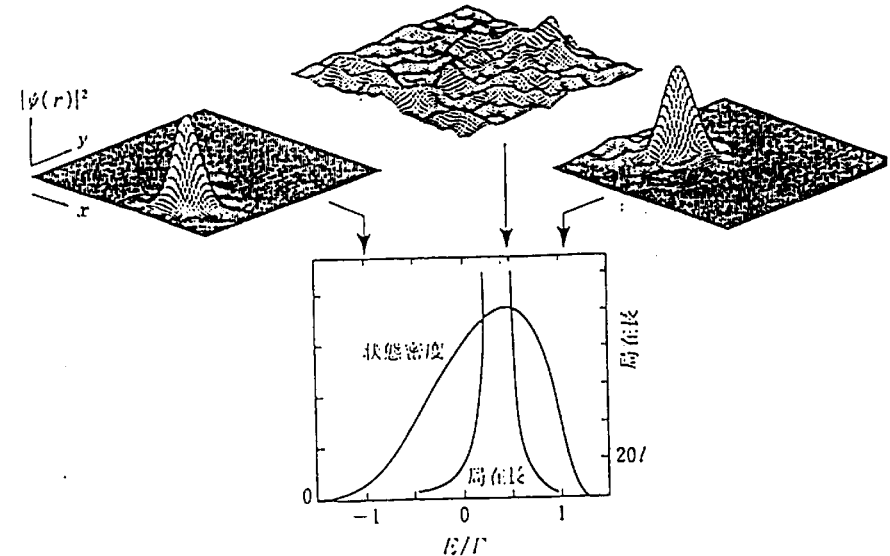
乱れた系のランダウ準位

- 乱れの無い系ではエネルギーは中心座標に依らず $\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$
- 乱れのある系ではポテンシャルに凹凸があり，サイクロトロン運動の中心座標によってエネルギーが異なるため，ランダウ準位に幅がつく。
- ランダウ準位の中心から外れたエネルギー状態はポテンシャルの谷または山の近傍に局在している。中心付近の状態は広がっている。



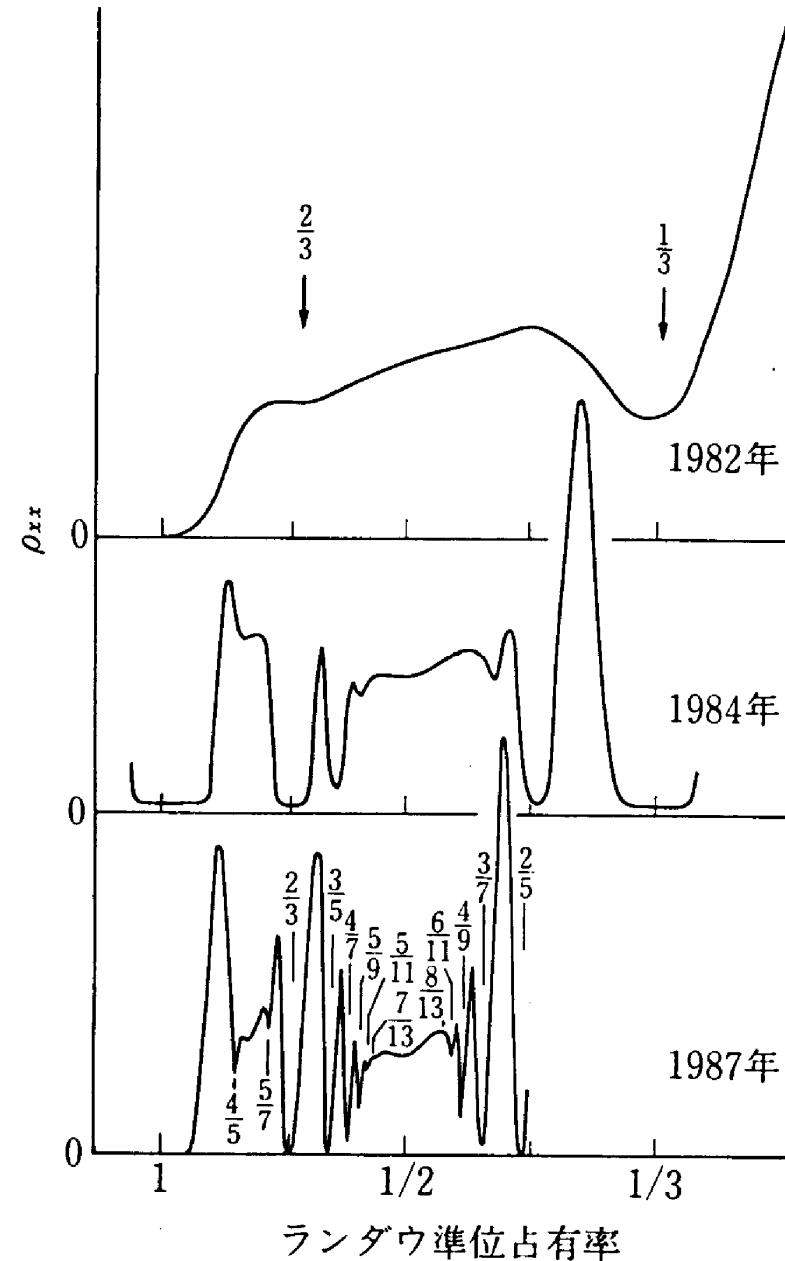
乱れた系のランダウ準位

- 乱れの無い系ではエネルギーは中心座標に依らず $\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$
- 乱れのある系ではポテンシャルに凹凸があり、サイクロトロン運動の中心座標によってエネルギーが異なるため、ランダウ準位に幅がつく。
- ランダウ準位の中心から外れたエネルギー状態はポテンシャルの谷または山の近傍に局在している。中心付近の状態は広がっている。



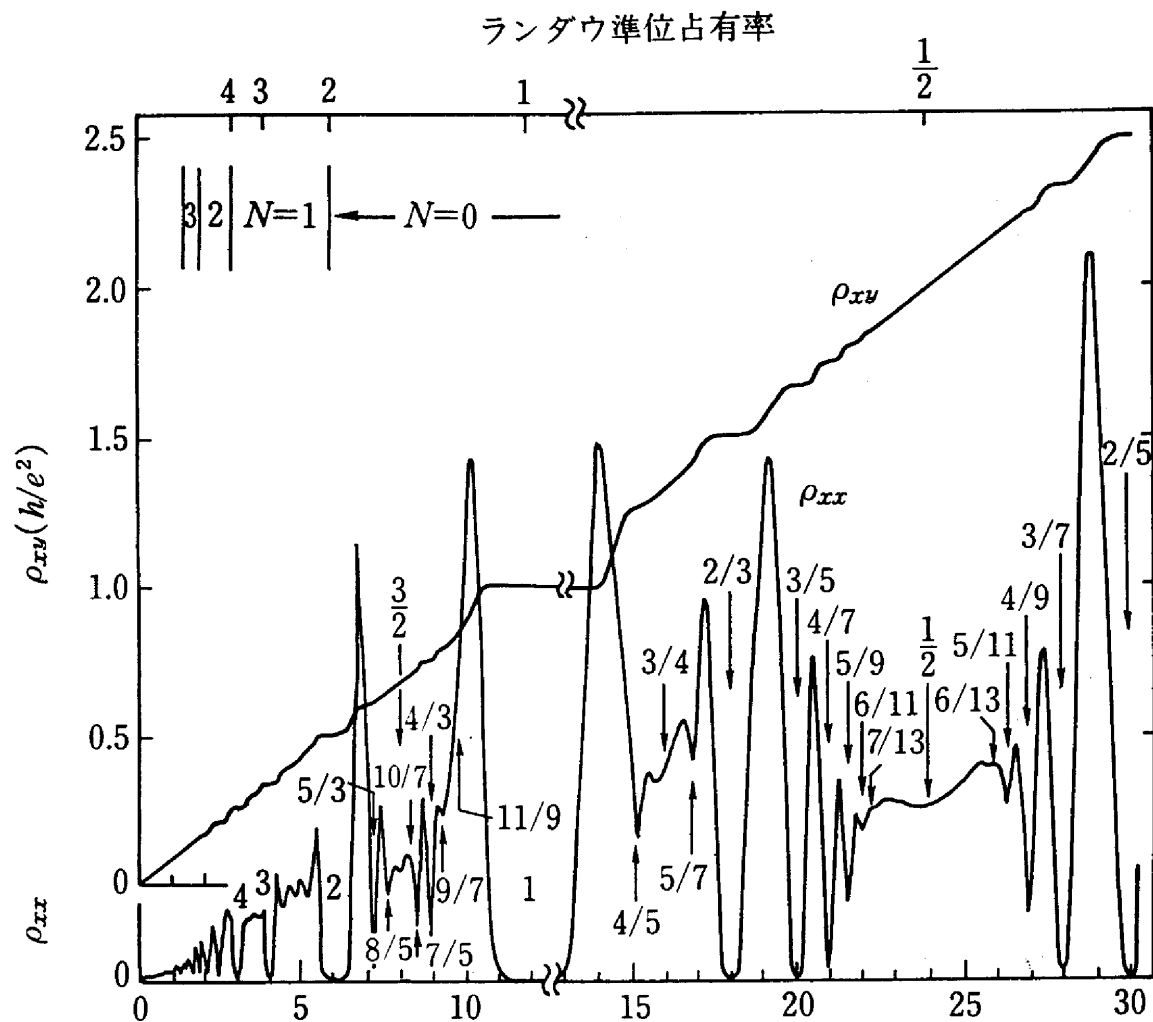
分数量子ホール効果

- 整数量子ホール効果では乱れによる局在が重要な役割を果たしていた。
- それに対して分数量子ホール効果では電子間の相互作用が本質的な役割を果たす。
- 乱れの少ない試料を作る技術が向上したことによってより精妙な構造が観測されるようになった。



分数量子ホール効果

$\nu = 1/3, 2/3, 2/5, 3/7, 4/9 \dots$ など奇数を分母とする分数充填率のところで量子ホール効果が起こる。



電子系の多体波動関数

$$z = x + iy$$

2次元座標を複素数で表す。N体の電子系の波動関数

$$\Psi(z_1, z_2, \dots, z_N)$$

1番目の電子が z_1 , 2番目の電子が z_2 ...という配置をとる確率が
で表される。

$$|\Psi(z_1, z_2, \dots, z_N)|^2$$

電子はフェルミ粒子であるからパウリの原理により、

2つの電子が同じ位置を占める確率はゼロでなければならない。

ラフリン波動関数

$$\nu = 1 \quad M = N$$

$$\Psi(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{\langle i, j \rangle}^N (z_i - z_j) \times \exp \left[- \sum_{i=1}^N \frac{|z_i|^2}{4\ell^2} \right]$$

電子数＝磁束量子の数という条件があるので、パウリ原理の要請から

$$\nu = 1/3 \quad M = 3N$$

$$\Psi(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{\langle i, j \rangle}^N (z_i - z_j)^3 \times \exp \left[- \sum_{i=1}^N \frac{|z_i|^2}{4\ell^2} \right]$$

波動関数は一義的に決まってしまう。

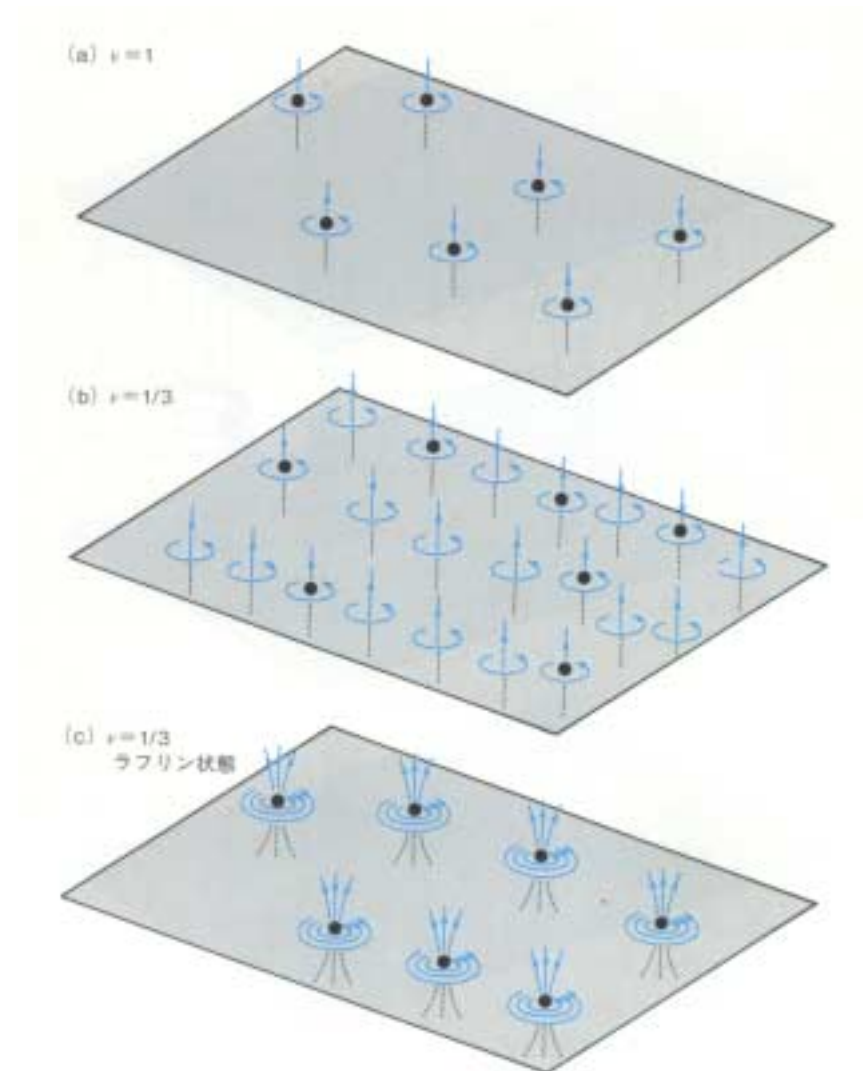
電子間の斥力相互作用エネルギーを最小にする状態

ラフリン状態

$\nu=1$ 状態は各電子に磁束
1本ずつ貼り付いた状態。

$\nu=1/3$ 状態では電子の数の
3倍の磁束がある。

各電子に3本ずつ貼り付け
た状態がラフリン状態。



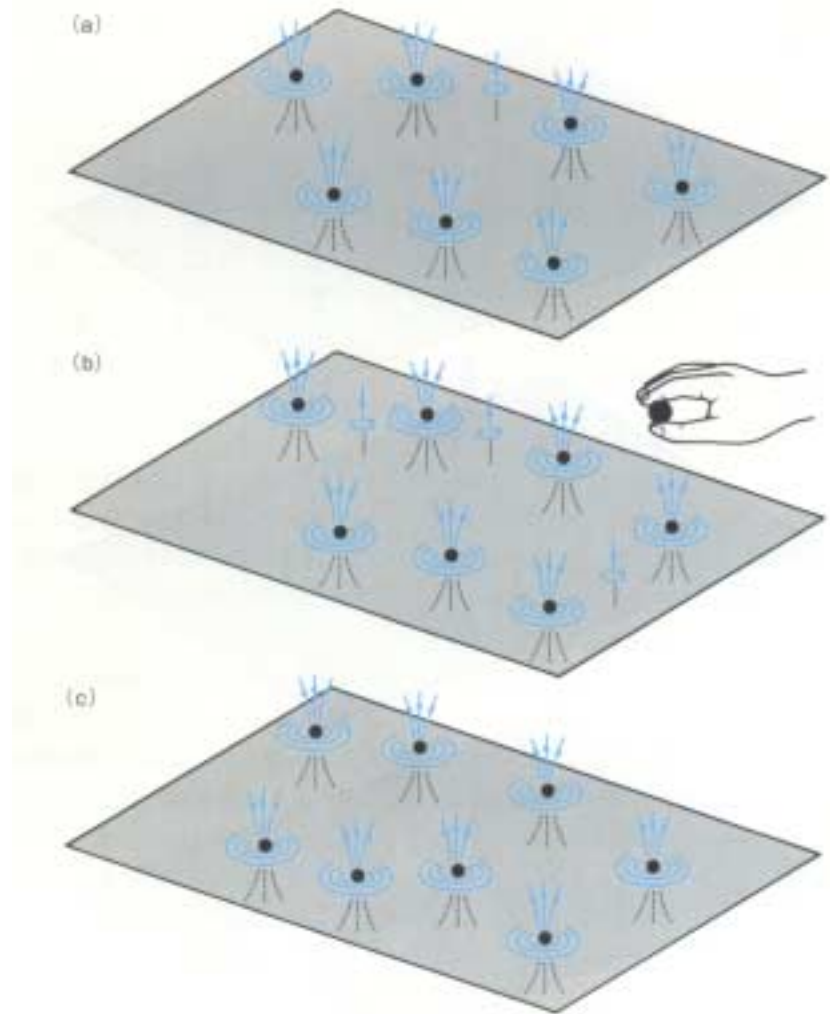
ラフリン状態というのはどんな状態か？

- 電子系の状態（液体か固体か）は次の3者のかね合いで決まる。
 - ①運動エネルギー
 - ②クーロン相互作用エネルギー
 - ③ポテンシャルの乱れ
- 通常，①が強いときは液体状態，②が強いときは固体（結晶）状態，③が強いときは乱れた固体（ガラス）状態になる。
- 強磁場では運動エネルギーが量子化されて抑えられるのでクーロンエネルギーが重要となる ⇒ 固体（電子結晶）になる傾向

- ・ しかし, ラフリン状態は特殊な液体状態 (非圧縮性液体)

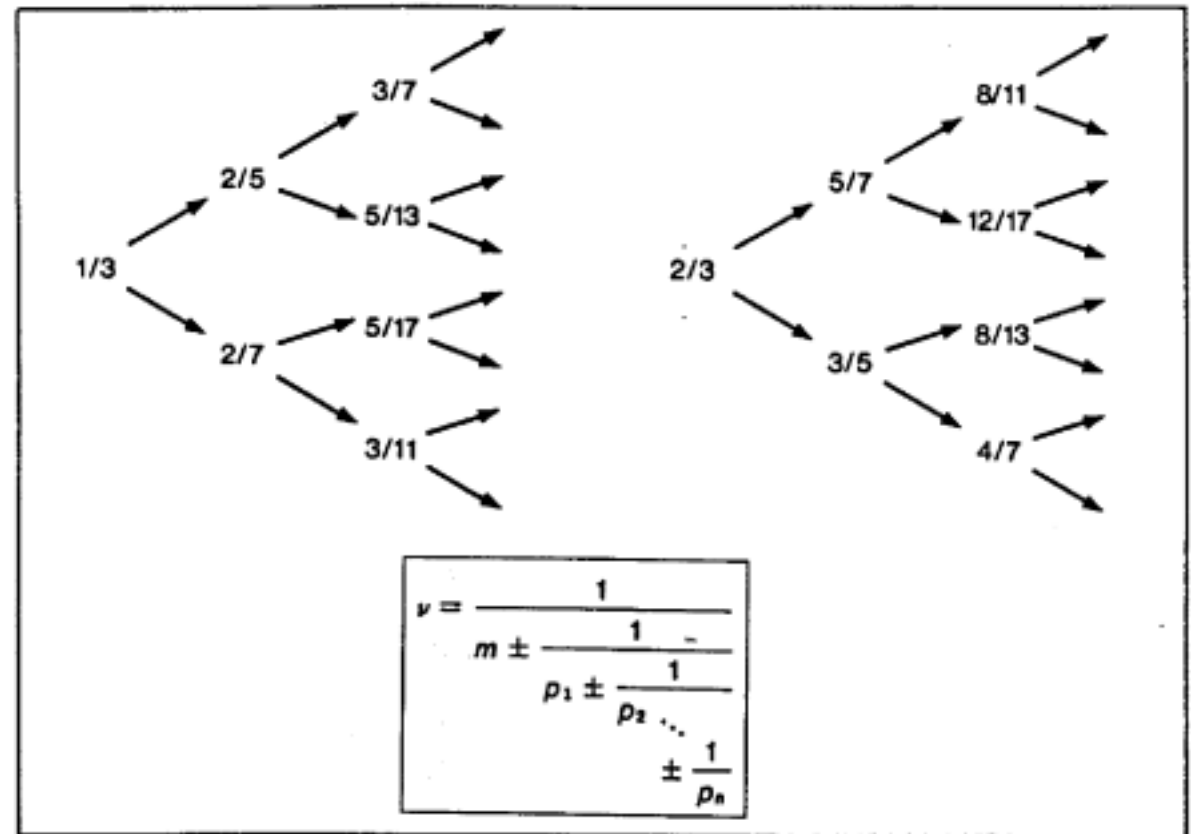
ラフリン状態からの励起

- $\nu=1/3$ から少し磁場を強くして、磁束量子を1本余分に加える。
- この操作を3回行くと余分の磁束が3本できる。
- そこに外から1個の電子を持ってきて3本の磁束と結びつけると再び $\nu=1/3$ 状態に戻る。
- 磁束3本 + 電子1個 = 0 であるから、磁束1本は電荷 $+1/3$ をもつ電子の抜け孔（準粒子）に相当する。



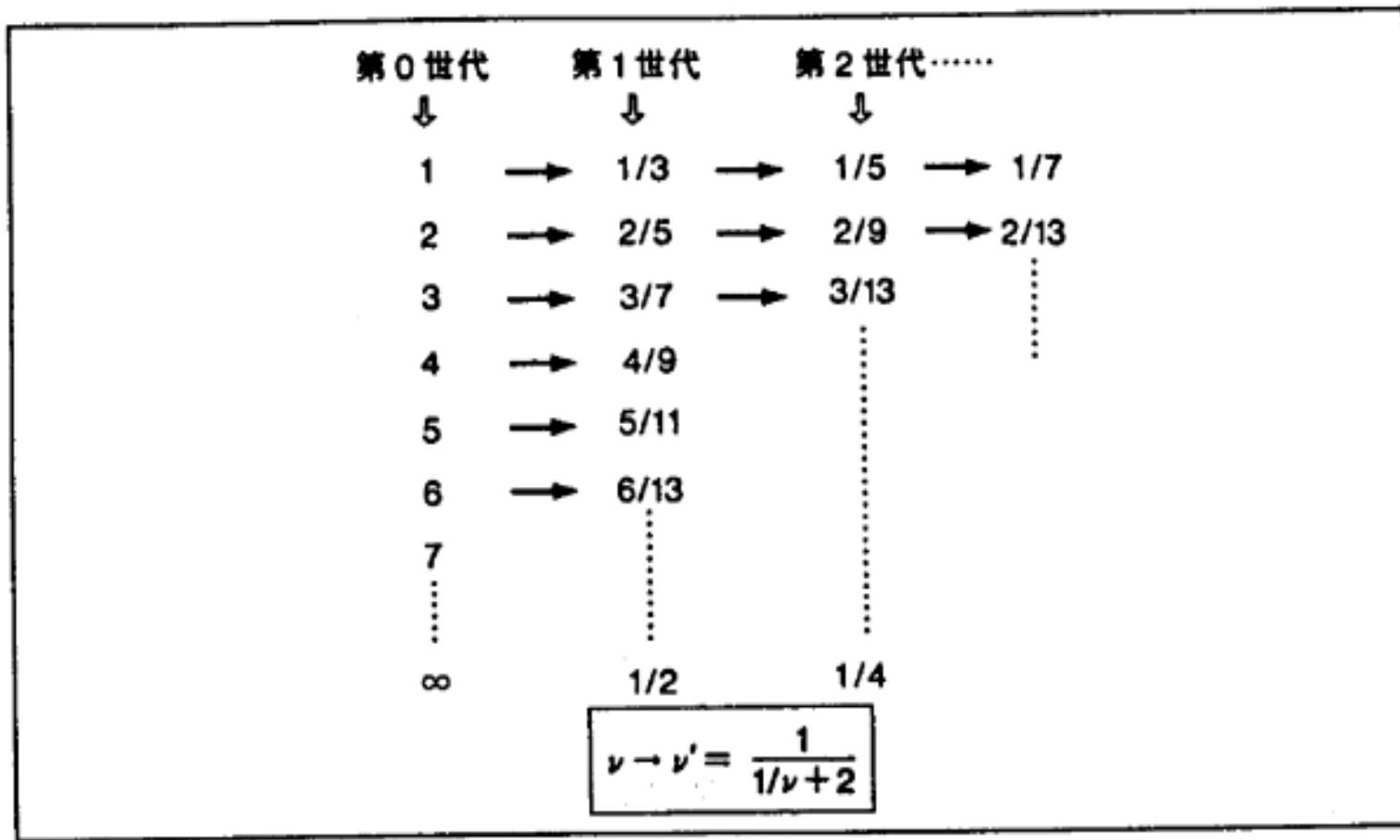
ホールデイン階層構造

- $\nu = 2/5$ など高次の分数量子ホール状態はどのように理解したらよいか？
- $\nu = 1/3$ からの励起である準粒子の集団がまたラフリン状態を作る。



ジェイン階層構造

- $\nu=1$ から $\nu=1/3$ に移るには各電子に 2本の磁束を余分に貼り付ければよい。
- 磁束を2本付ける変換により新しい状態が生成される $\nu^{-1} \rightarrow \nu^{-1} + 2$



高次分数量子ホール状態の作り方

ランダウ準位を一つ進める変換

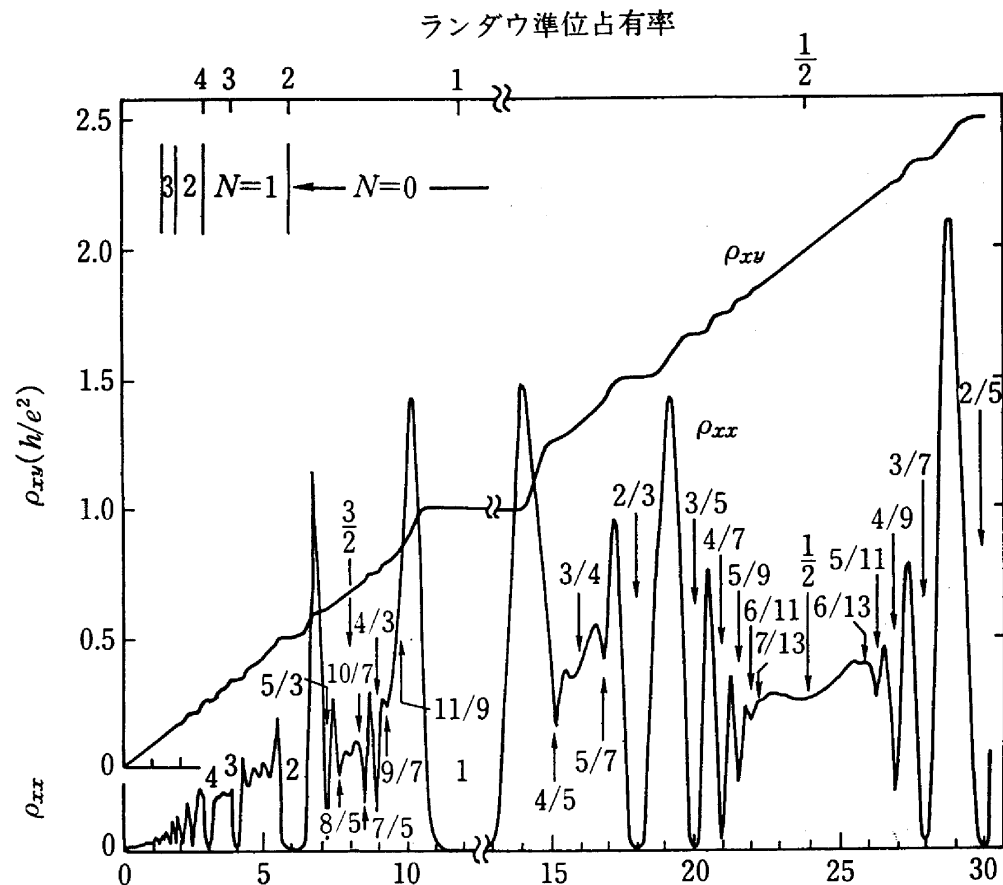
$$\nu \rightarrow \nu + 1$$

電子・正孔対称変換

$$\nu \rightarrow 1 - \nu$$

磁束を2本追加する変換

$$\nu^{-1} \rightarrow \nu^{-1} + 2$$



複合フェルミオン

ジェイン階層構造の見方によれば,

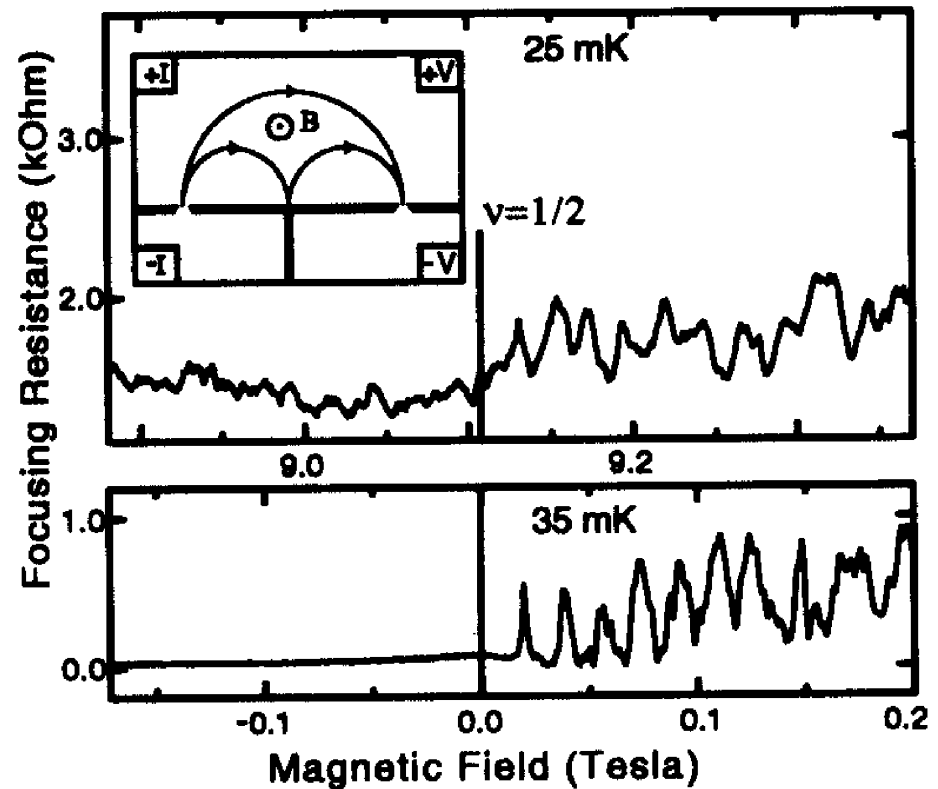
もとの電子にとっての $\nu = 1/3, 2/5, 3/7, 4/9, \dots$ という分数量子ホール状態の系列は, 電子に磁束2本を付加した新しい粒子 (複合フェルミオン) にとっての $\nu = 1, 2, 3, 4, \dots$ という整数量子ホール状態の系列に対応する.

さらに電子にとっての $\nu = 1/2$ 状態は, 複合フェルミオンにとっての $\nu = \infty$ すなわち磁場ゼロの状態に対応する.

複合フェルミオンは実在？

$\nu=1/2$ 付近のふるまいは，複合フェルミオン描像に立てば，弱磁場での現象からの類推で理解できる。

そのような実験的証拠として磁気集束(magnetic focusing)の実験がある。



蟹カノン

J.S.Bach & M.C.Escher

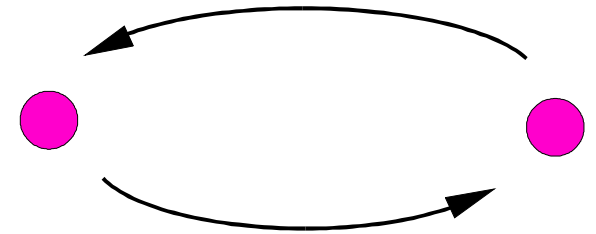


量子力学の基本原則

N個の粒子からなる系を記述する波動関数 $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_N)$

- ・ 同じ種類の素粒子は**識別不能**
- ・ 定数倍だけ違う波動関数は同じ状態を表す

2つの素粒子を入れ替えても元と同じ状態
波動関数は数因子だけしか変わらない。



$$\Psi(\dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_i, \dots) = C\Psi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots)$$

粒子の交換を2回行うのは何もしなかったのと同じ

$$C^2\Psi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots) = \Psi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots)$$

$$C^2 = 1 \Rightarrow C = \pm 1$$

ボーズ粒子とフェルミ粒子

$C = +1$ か $C = -1$ によって素粒子は2通りに分類される.

- $C = +1$ 波動関数が粒子の交換に対して対称
ボーズ粒子 (ボゾン)
- $C = -1$ 波動関数が粒子の交換に対して反対称
フェルミ粒子 (フェルミオン)

相対論的量子力学によれば粒子の量子統計性はスピンと結びついていて

- スピンが整数の粒子はボーズ粒子
- スピンが半奇数の粒子はフェルミ粒子

ボーズ粒子とフェルミ粒子

素粒子のレベルでは

物質を構成する素粒子である陽子，中性子，電子などはフェルミ粒子

もしも電子がボーズ粒子だった，原子核のまわりを回る電子はすべて最低エネルギーの軌道に落ち込んでしまうため，元素の個性が無くなり，化学は成立しない

陽子や中性子がボーズ粒子だったら，物質はすべてつぶれてしまう

粒子間の相互作用を媒介する光子や π 中間子などはボーズ粒子

光子がフェルミ粒子だったらレーザーはできない

物性の世界では（陽子・中性子・電子が構成要素）

奇数個のフェルミ粒子からなる原子はフェルミ粒子：ヘリウム3原子

偶数個のフェルミ粒子からなる原子はボーズ粒子：ヘリウム4原子

ボソン系とフェルミオン系

- ・ボソンは1つの状態に何個でも入ることができる

ボソン系は十分低温ではすべて最低エネルギー準位に落ち込み
ボーズ凝縮を起こす。

液体ヘリウム4の超流動

レーザー冷却されたルビジウム原子のボーズ凝縮

- ・フェルミオンは1つの状態に1個しか入れない（パウリ原理）

フェルミオン系は十分低温では、最低エネルギー準位から順に
1個ずつ詰まっていった状態が実現する。フェルミ縮退

金属中の電子系

液体ヘリウム3

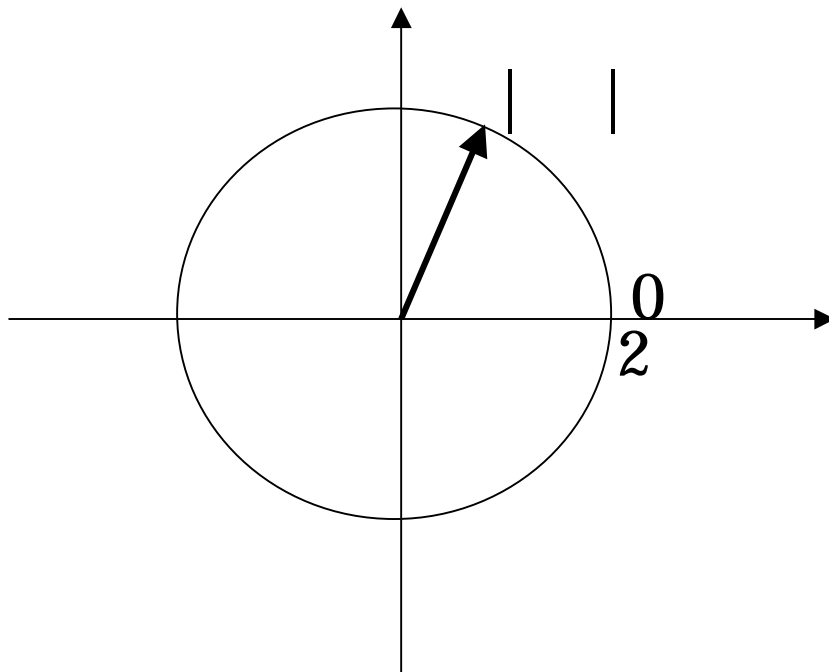
フェルミオンが2個ずつペアを作ってボソンの的になり（クーパー対），

それらがボーズ凝縮を起こしたのが超伝導状態.

波動関数の位相

波動関数は複素数 $\Psi = |\Psi| e^{i\theta}$

θ : 位相



$$\theta = 0, 2\pi \Rightarrow e^{i\theta} = 1$$

$$\theta = \pi \Rightarrow e^{i\theta} = -1$$

アハラノフ・ボーム位相

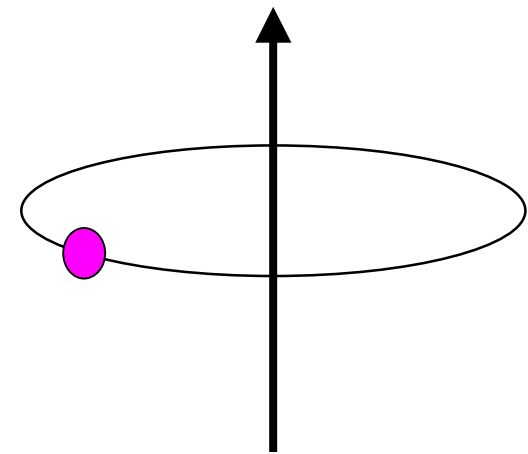
電子が動くとき, その経路 C に沿ってベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を積分した位相 γ が加わる

$$\gamma = \frac{e}{\hbar} \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad : \text{アハラノフ・ボーム位相}$$

経路 C が閉曲線であれば波動関数の一価性の要請から, γ は 2π の整数倍でなければならない

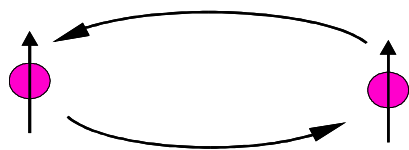
$$\gamma = \frac{e}{\hbar} \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 2n\pi$$

$$n=1 \Rightarrow \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{h}{e} \quad \text{磁束量子}$$

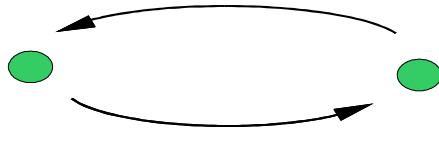


2次元世界における量子統計性の任意性

2次元世界では電子に磁束を付加することによって、2電子を交換したときの位相因子を自由に変えることが可能である。

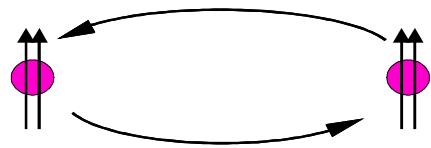


奇数本の磁束付加

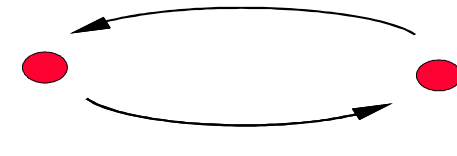


複合ボソン

$$\theta = \pi + \pi = 0 \pmod{2\pi}$$



偶数本の磁束付加



複合フェルミオン

$$\theta = \pi + 2\pi = \pi \pmod{2\pi}$$

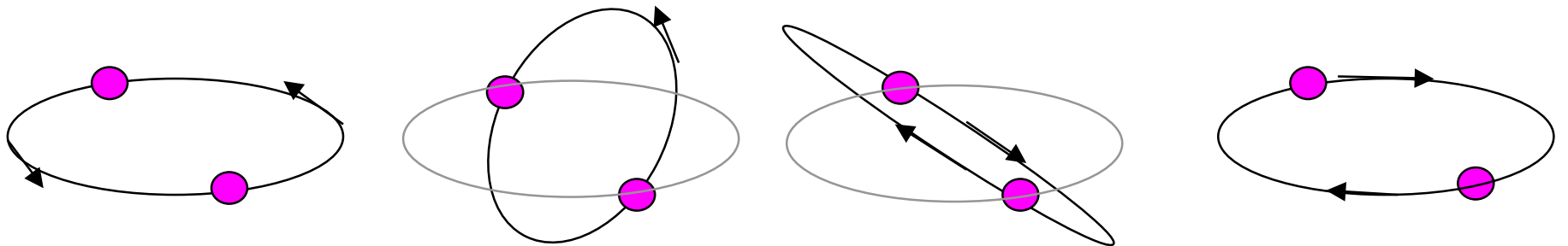
さらには任意の位相因子を付加することも可能である

$$\theta = \pi + \varphi \pmod{2\pi} \quad \text{エニオン (anyon)}$$

3次元世界ではどうか？

2次元世界では、2つの粒子を交換する経路が右回りであるか左回りであるかが区別できるため、電子に付加した**仮想的磁束に位相因子を負わせる**ことが可能である。

それに対して**3次元世界**では右回りの交換と左回りの交換とは互いに連続的に移行できるので本質的に区別できない。従って、**3次元世界ではフェルミオンとボソンの区別は絶対的**である。



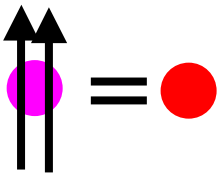


複合粒子描像での分数量子ホール状態



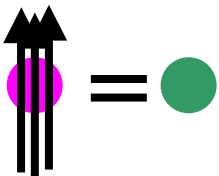
電子

$\nu = 1/3$ の分数量子ホール状態



複合フェルミオン

$\nu = 1$ の整数量子ホール状態



複合ボソン

磁場ゼロの超伝導状態