東葛テクノプラザ夏休み科学教室
2006年8月7日(木), 8日(金)

すうがくマジック

東京大学物性研究所
家 泰弘

電卓で遊ぼう

ウォーミングアップ（準備体操）

電卓の使い方に慣れよう.

- かけ算

  123×456＝56088

- 割り算

  56088÷123＝456 （割り切れる場合）

  56090÷123＝456 余り２ （割り切れない場合）

  電卓の計算では

  56090÷123＝456. 0162601626･･･

  のように小数になる

電卓で遊ぼう（その1）

- 3桁(けた)の好きな数字を考えよう.
  - たとえば　296
- その数字を2回繰り返したものを電卓に入れる.
  - 296296と入力する
- その数字は7で割り算してみる.
- その答えを11で割り算してみる.
- その答えを13で割り算してみる.
- さて, 出てきた答えは?
  - ・・・・・・・・
- どうしてそうなるか・・・, わかるかな?

タネ明かし

- ７×１１×１３＝１００１
- ２９６×１００１＝２９６×１０００＋２９６
  ＝２９６０００＋２９６
  ＝２９６２９６
- （（２９６２９６÷７）÷１１）÷１３
  ＝２９６２９６÷（７×１１×１３）
  ＝２９６２９６÷１００１
  ＝２９６

電卓で遊ぼう（その2）

- 電卓に　12345679　と入力する.
- 1から9までの好きな数字を選ぶ.

  たとえば３

- その数字×９を，12345679に掛ける.

  12345679×27

- さて，その答えは？

  ・・・・・・・・・・・・・・

- どうしてそうなるか・・・，わかるかな？

タネ明かし

- １２３４５６７９×９＝１１１１１１１１１

- １２３４５６７９×２７＝１２３４５６７９×９×３
  ＝１１１１１１１１１×３
  ＝３３３３３３３３３

電卓で遊ぼう（その3）

- 電卓に 142857 と入力する.
- ×３ を計算してみよう. どうなったかな？

142857×3＝428571

- 同様に, ×２, ×４, ×５ , ×６ を計算してみると?

142857×1＝　　142857×4＝

142857×2＝　　142857×5＝

142857×3＝　　142857×6＝

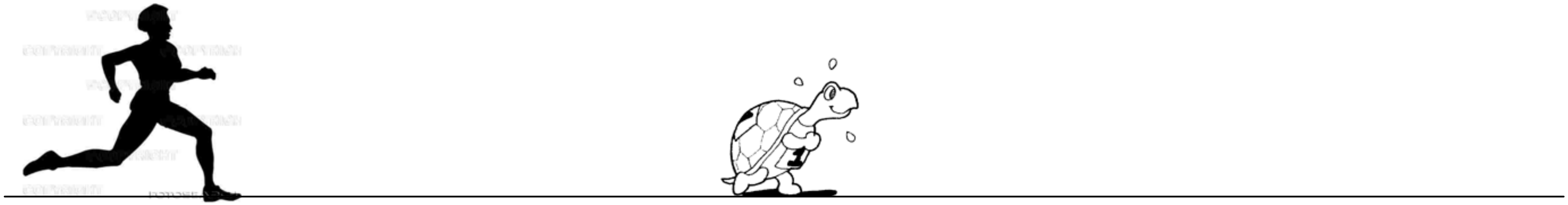
×７ を計算してみよう. どうなったかな？

142857×7＝999999

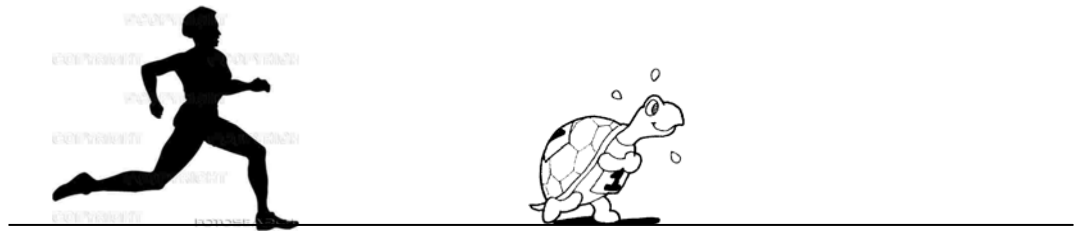
$$\infty$$

無限の足し算（級数）

アキレスと亀（ゼノンの逆理）



亀がもと居た所まで
アキレスが行くと
亀は既に先に行っている



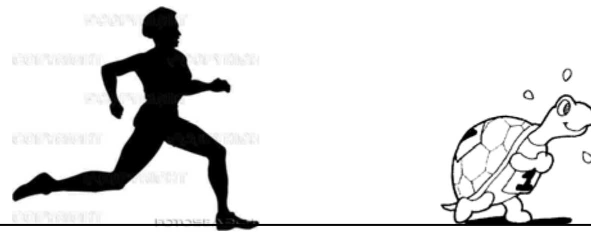
亀が居た所まで
アキレスが着いた時には
亀はまた先に行っている

結局，アキレスはいつまで経っても
亀に追いつけない･･･本当だろうか？

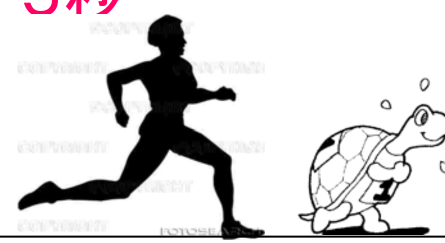
アキレスと亀

100m 10秒

アキレスは100mを10秒で走り，亀はアキレスの半分のスピードで走るとしよう



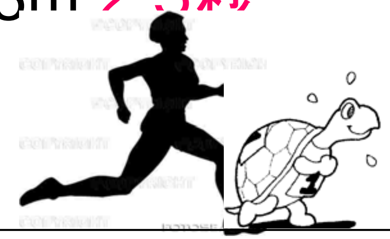
50m 5秒



25m 2.5秒

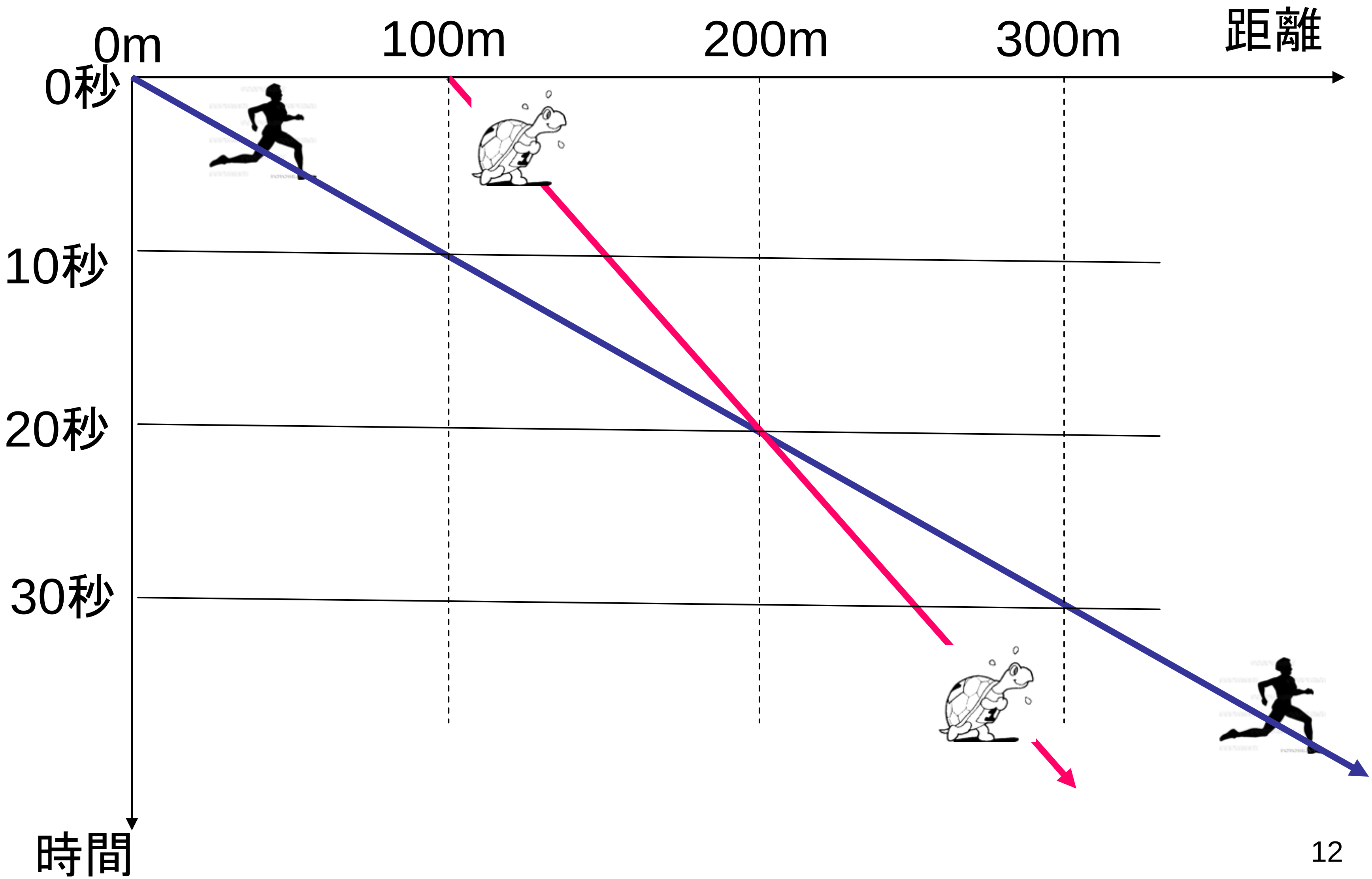
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=2$$

20秒でアキレスは亀に追いついて，追い越す



12.5m 1.25秒

グラフで表すと



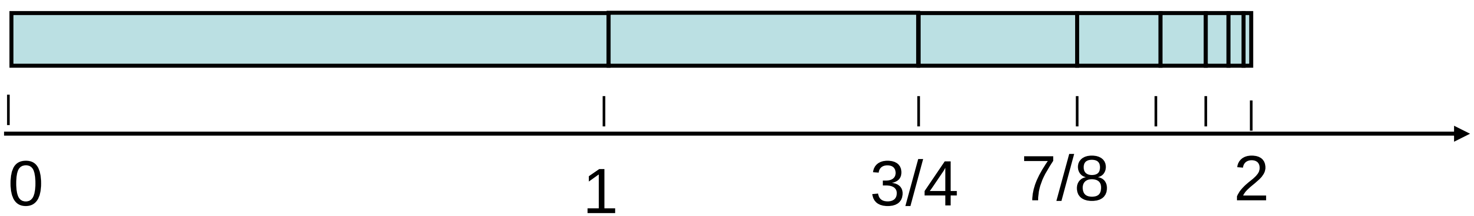
無限の足し算(級数)

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}A \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2$$



無限級数(むげんきゅうすう)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=2$$

無限個の足し算の結果が有限(無限大ではない)になる場合
無限級数が「**収束する**」という.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\cdots$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

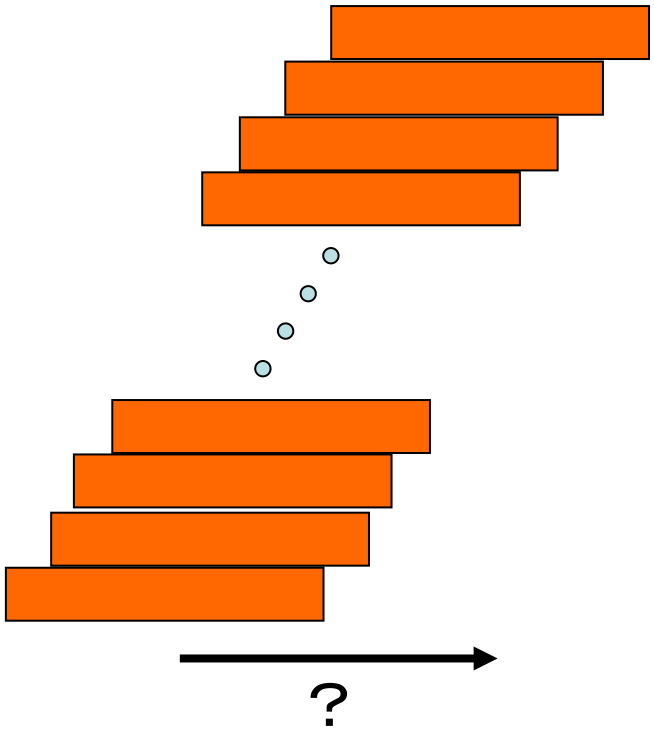
$$=\infty$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\infty$$

この場合は，無限個の足し算の結果が無限大になる.
無限級数が「**発散する**」という.

レンガ積み

同じ大きさのレンガを積んでどのくらい張り出させることができるだろうか？

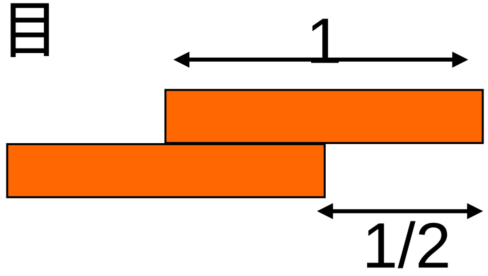


(1)レンガの長さの半分まで
(2)レンガの長さと同じところまで
(3)レンガの長さの2倍まで
(4)レンガの長さの3倍まで
(5)いくらでも好きなだけ

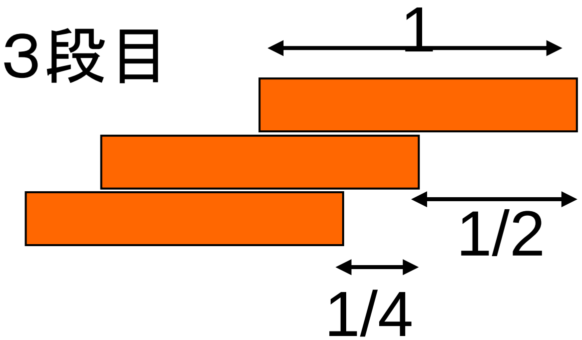
答えは？・・・・・
(5)いくらでも好きなだけ
ただし，必要なレンガの数は急速に大きくなる

上の段から順に考えるとわかりやすい

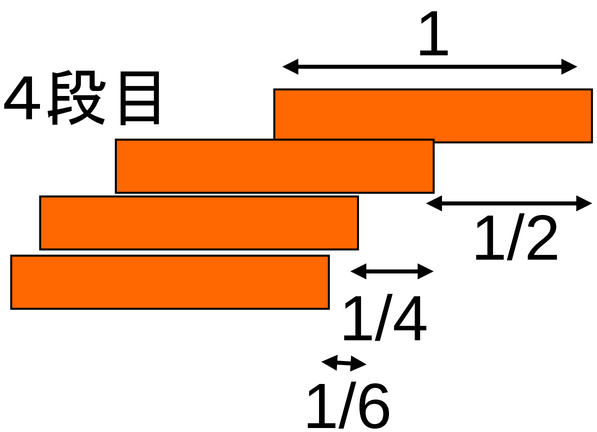
２段目



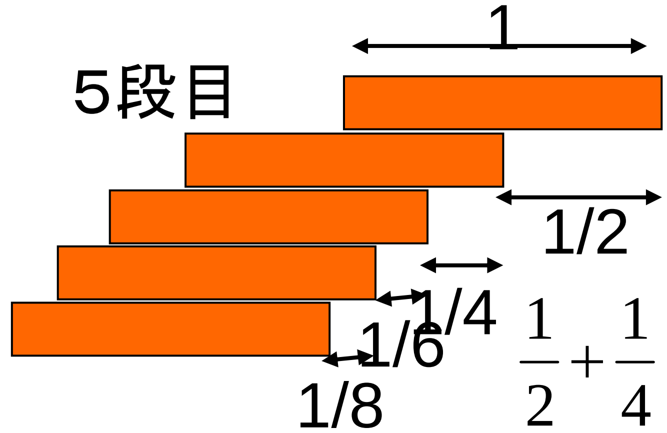
３段目



４段目



５段目



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{25}{24}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\right)$$
$$=\infty$$

答え：いくらでも張り出すことができる !?

ただし、必要なレンガはすぐに膨大な数になってしまう.

無限級数はふしぎ

$$1-1+1-1+1+\cdots=?$$

$$\begin{aligned}1-1+1-1+1-1+\cdots &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\ &= 0+0+0+\cdots=0\,?\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1-1+1-1+1-1+\cdots &= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots \\ &= 1+0+0+0+\cdots=1\,?\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 1-1+1-1+1+\cdots \\ &= 1-(1-1+1-1+\cdots)=1-x\end{aligned}$$

$$x=1-x \Rightarrow x=\frac{1}{2}\,?$$

これは難しい！

リーマン予想

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\cdots$$ という級数は

n=1のときは発散，n=2以上の整数ならば収束

オイラー積

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\cdots=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{5^n}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{7^n}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{11^n}\right)}\cdots$$

$$\zeta(z)=1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\frac{1}{5^z}+\cdots$$ リーマンのツェータ関数

【リーマン予想】ツェータ関数のゼロ点（ζ(z)がゼロになるようなzの値）はすべて、z=1/2＋iν の形に書ける.

有理数と無理数

分数と小数

$$\frac{1}{2} = 0.5 \qquad \frac{1}{3} = 0.3333333333333333\cdots$$

$$\frac{1}{4} = 0.25 \qquad \frac{1}{5} = 0.2$$

$$\frac{1}{6} = 0.1666666666\ \ 666666\ \cdots$$

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857\cdots$$

$$\frac{1}{8} = 0.125$$

$$\frac{1}{9} = 0.111111111111111\cdots$$

電卓で遊ぼう（その3）

142857×2＝285714

142857×3＝428571

142857×4＝571428

142857×5＝714285

142857×6＝857142

142857×7＝999999

0.142857142857142857・・・×7

＝0.999999999999999999・・・

＝1

1／7＝0.142857142857142857・・・・

有理数

- 整数と分数を合わせた全体を「有理数」という.
- 有理数を小数で表したものは,

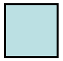
$\frac{1}{2}=0.5$ や $\frac{1}{8}=0.125$ のように途中で終わるか（有限）,

$\frac{1}{3}=0.3333333333333333\cdots$ や $\frac{1}{7}=0.142857142857142857\cdots$

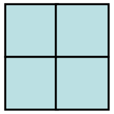
のように同じ数字（の組）の繰り返しになる.

- 「有理数でない数」ってあるのだろうか？

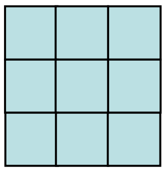
正方形の面積：２乗



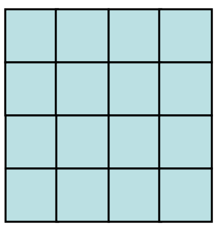
$$1^2 = 1 \times 1 = 1$$



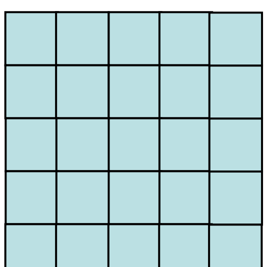
$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$



$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$



$$4^2 = 4 \times 4 = 16$$



$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

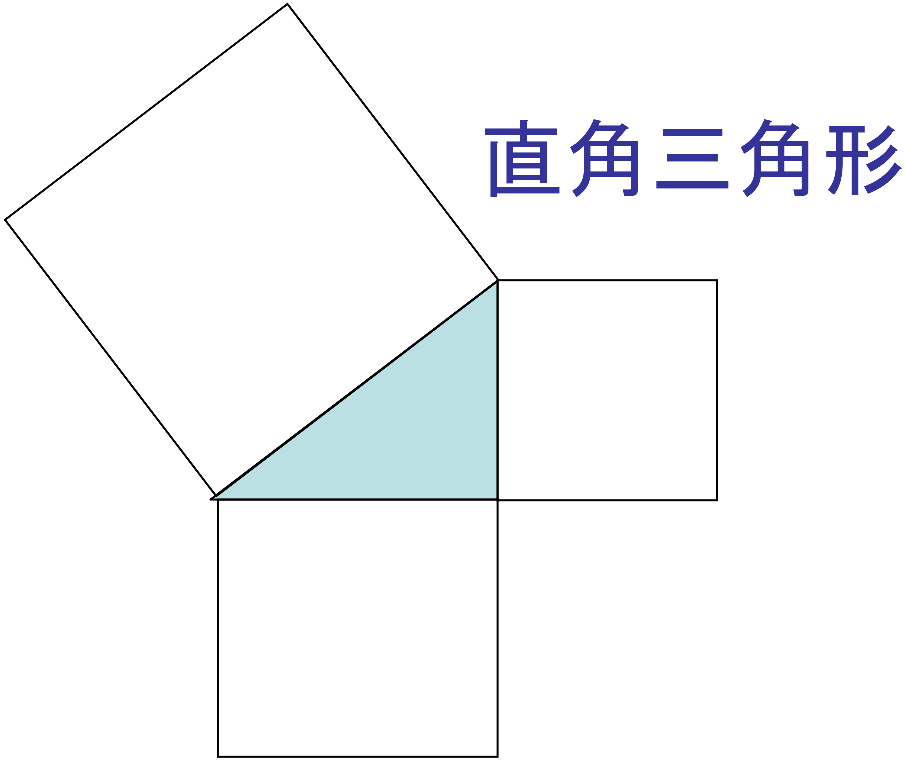
同じ数を2回掛け算することを「２乗」という.

$$7^2 = 7 \times 7$$

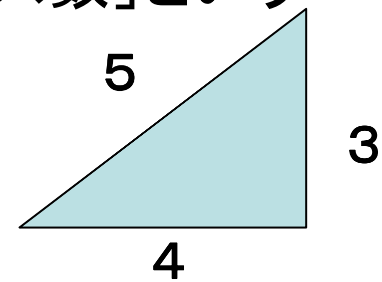
３回掛け算することは「３乗」

$$7^3 = 7 \times 7 \times 7$$

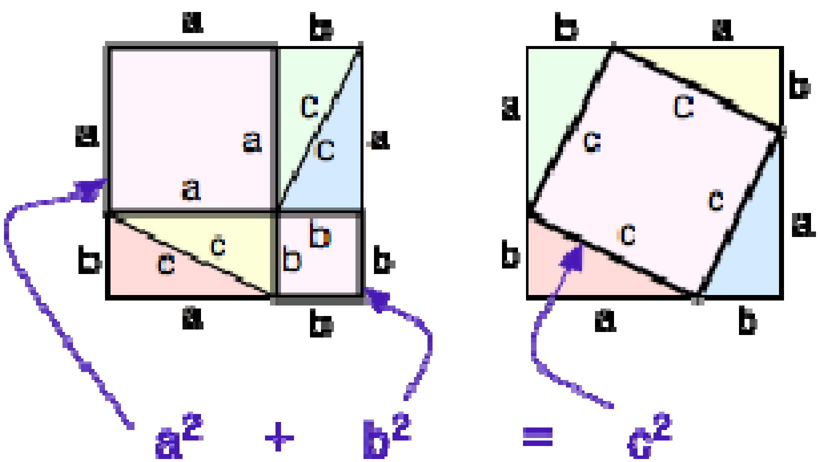
ピタゴラスの定理



ピタゴラスの関係を満たす整数の組
「ピタゴラス数」という



$$3^2 + 4^2 = 5^2$$



このような組み合わせは

（3, 4, 5）
（5, 12, 13）
（8, 15, 17）
（7, 24, 25）
・・・・・・・・

など無限にある.

これは難しい！

フェルマー予想

n が3よりも大きい自然数のとき，

$$a^n + b^n = c^n$$

を満たす自然数 a, b, c は存在しない．

ピエール・ド・フェルマー
(1607-1665)

「n が3以上のとき、一つの n 冪を二つの n 冪の和に分けることはできない。この定理に関して、私は真に驚くべき証明を見つけたが、この余白はそれを書くには狭すぎる」と書き残した。

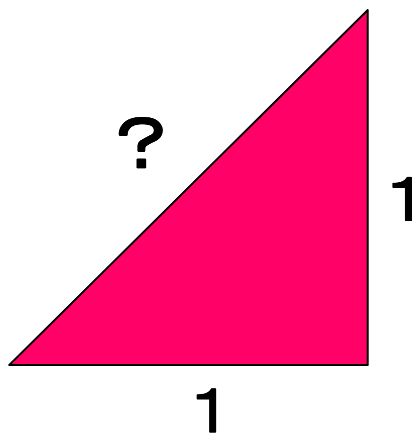
その後，多くの名だたる数学者がその証明に挑戦したが，果たせず，1995年にアンドリュー・ワイルズによって証明が与えられた．

・その証明では，谷山・志村予想という日本人数学者の成果が重要な役割を果たした．

二等辺直角三角形の斜辺

辺の長さがピタゴラス数ではない直角三角形もたくさんある.
（それらのほうがはるかに多い．）

簡単な例：　直角二等辺三角形（三角定規の1つ）



$$1^2 + 1^2 = x^2$$

$$x^2 = 2$$

２乗して2になるような数xとは？

無理数

$$x^2 = 2$$

２乗して2になるような数xとは？

$$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$$

小数点以下，繰り返しではない数字の列が無限に続く

$$\sqrt{3} = 1.7320508\cdots$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{5} = 2.2360679\cdots$$

$$\sqrt{6} = 2.4494897\cdots$$

$$\sqrt{7} = 2.6457513\cdots$$

$$\sqrt{8} = 2.8284271\cdots$$

$$\sqrt{9} = 3$$

円周率も無理数

$$\pi = 3.1415926575\ 8979323846\ 2643385029\ \cdots$$

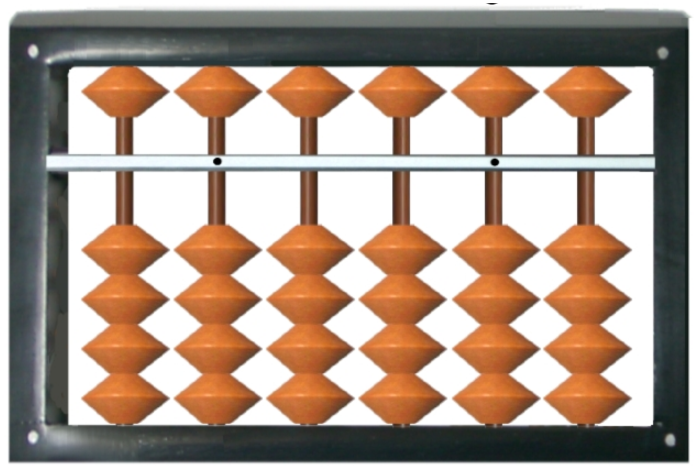
ギリシャ文字のパイ

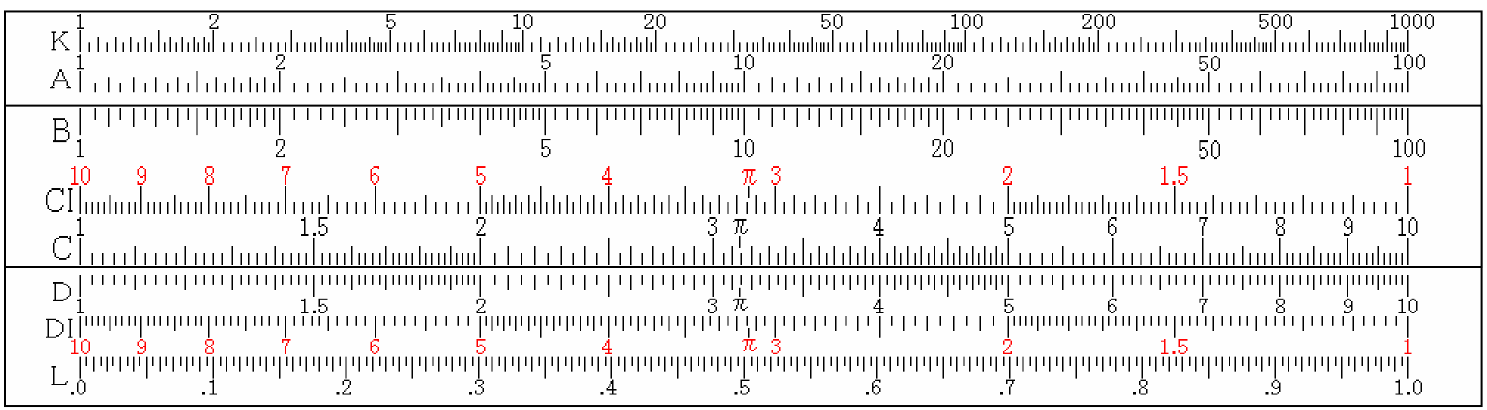
計算尺を作ろう

計算の道具

いまのように電卓やパソコンが普及する前は・・・・・

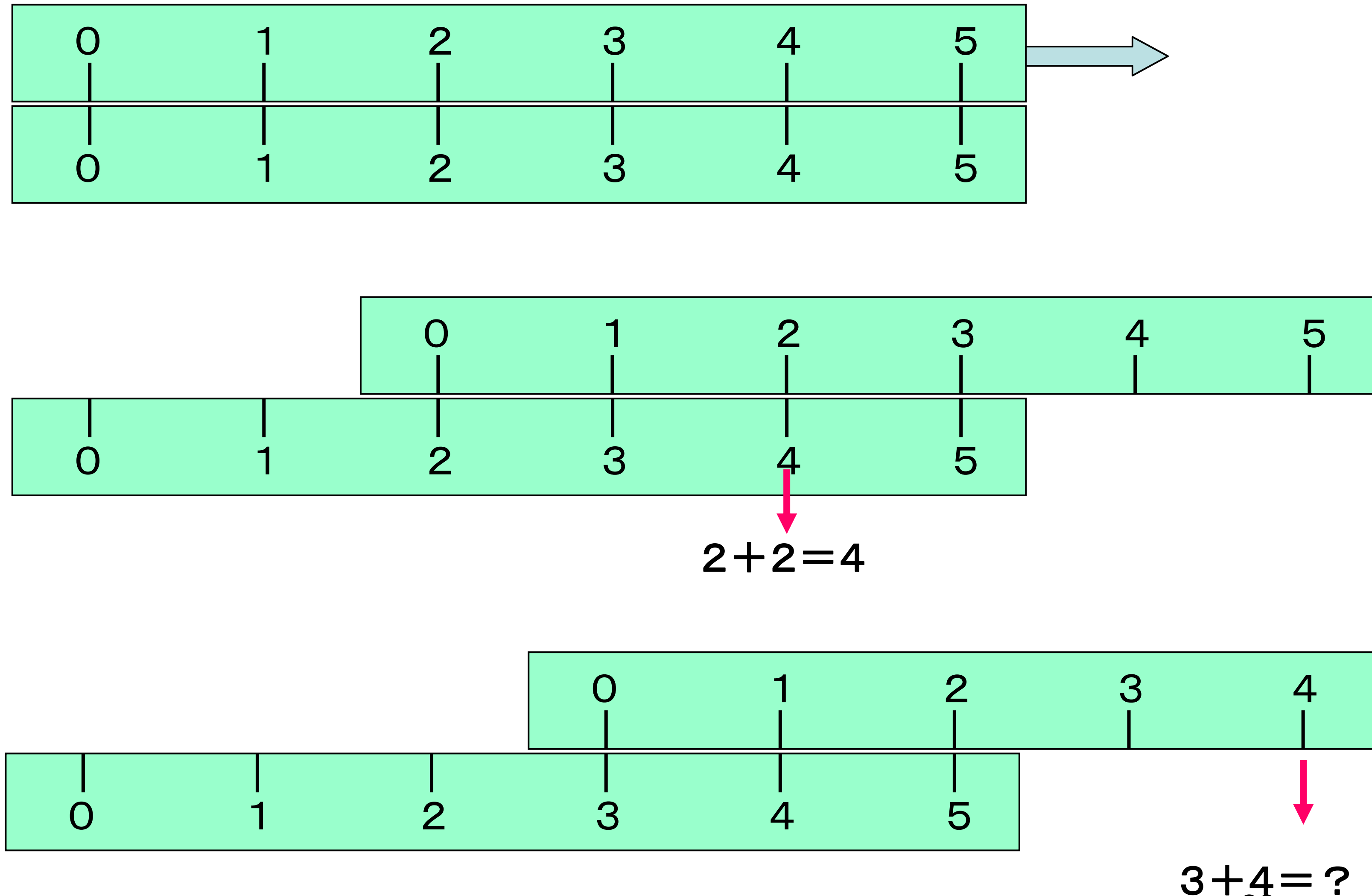
そろばん



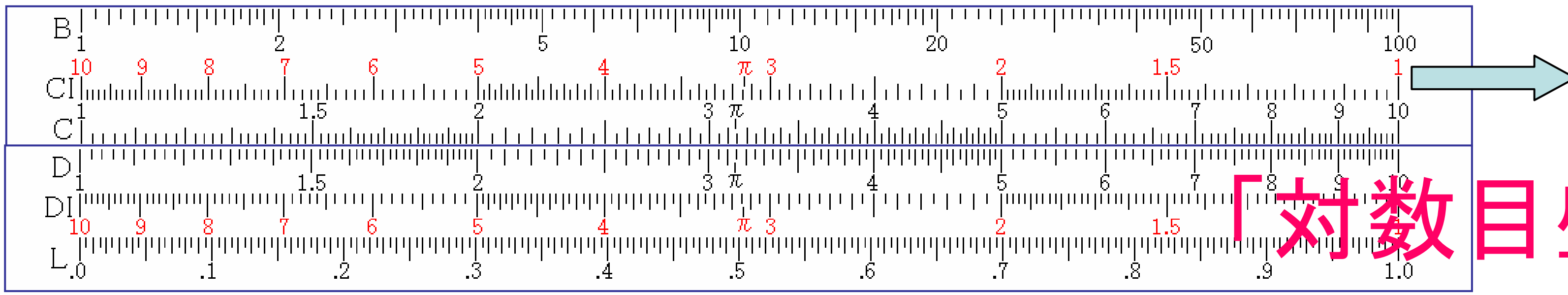


計算尺

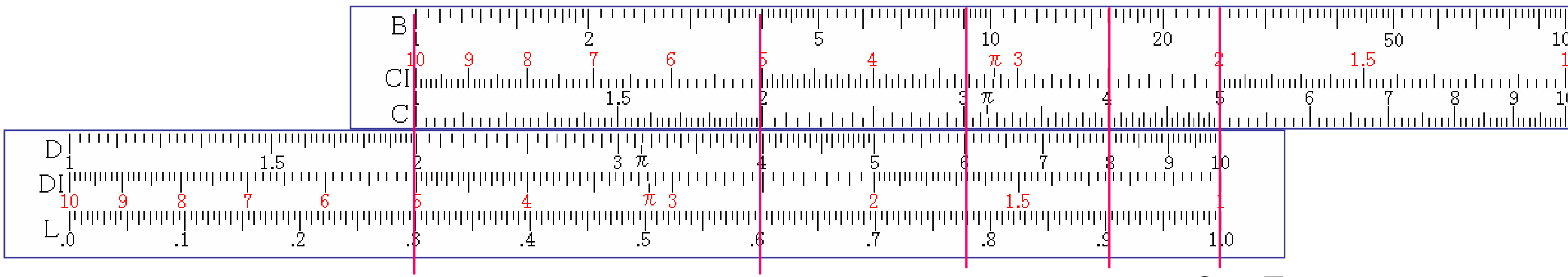
定規を使って足し算の計算



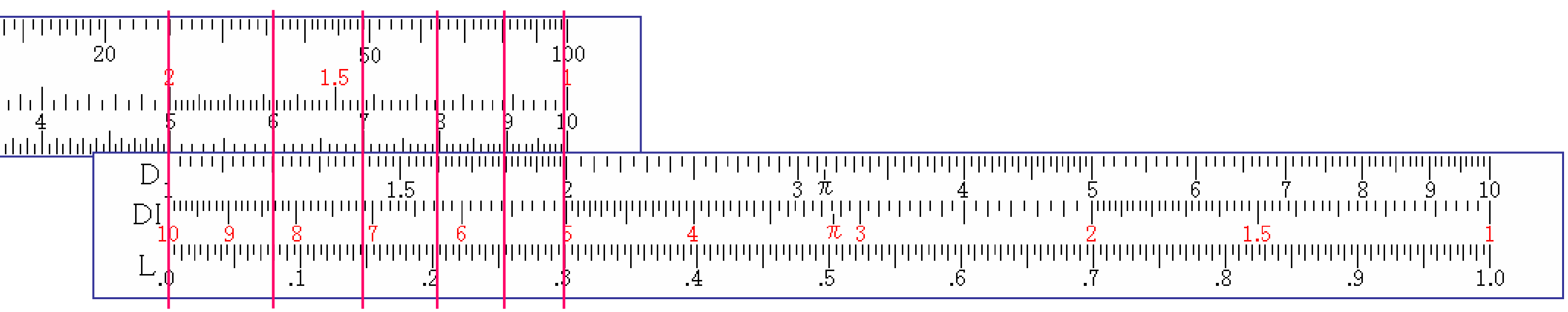
計算尺を使って掛け算



「対数目盛」



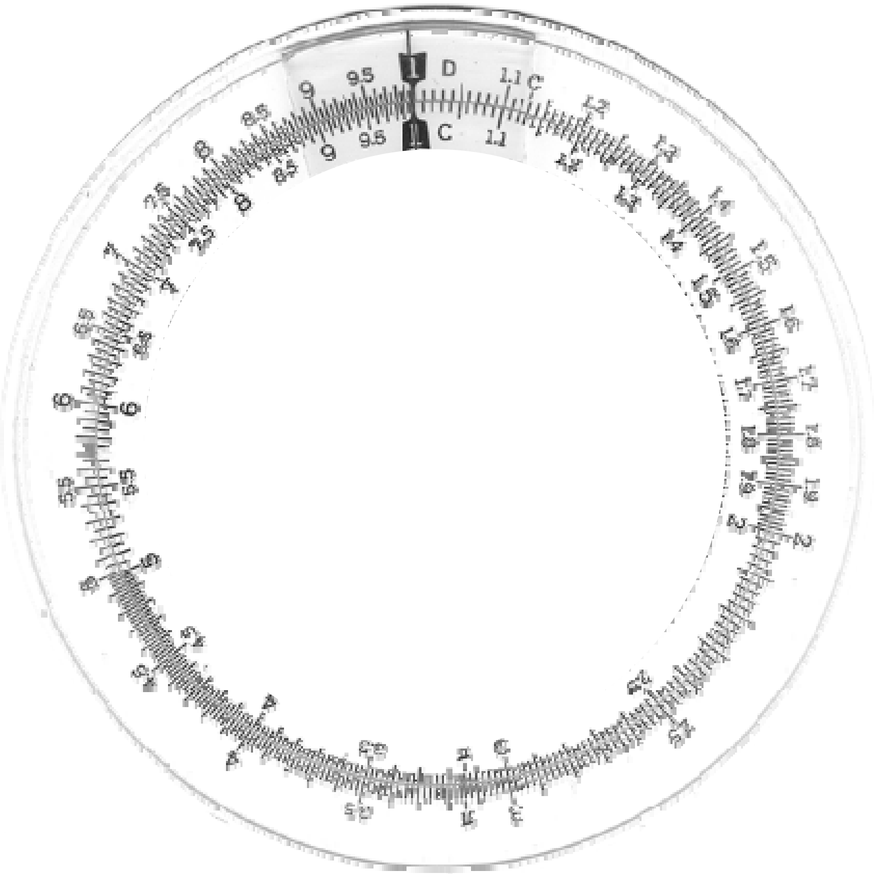
２×２　２×３　２×４　２×５



２×６　２×８　２×１０

２×５　２×７　２×９

円形計算尺

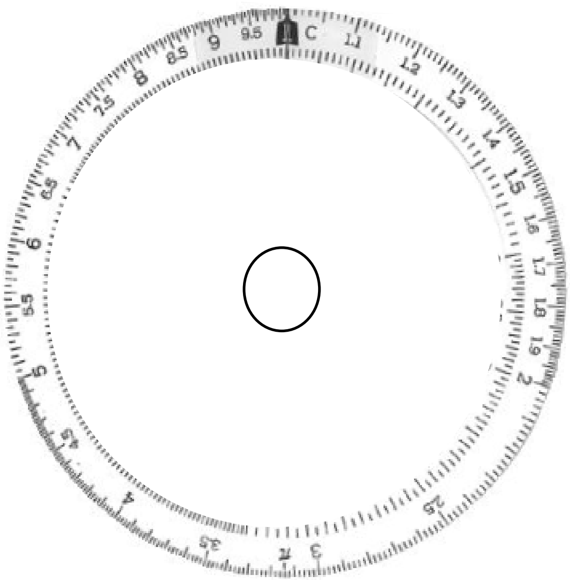


円なので，桁上がりで外れることがなくて便利

円形計算尺を作ろう

円形計算尺の内側

プリンタブルCDで作ってある

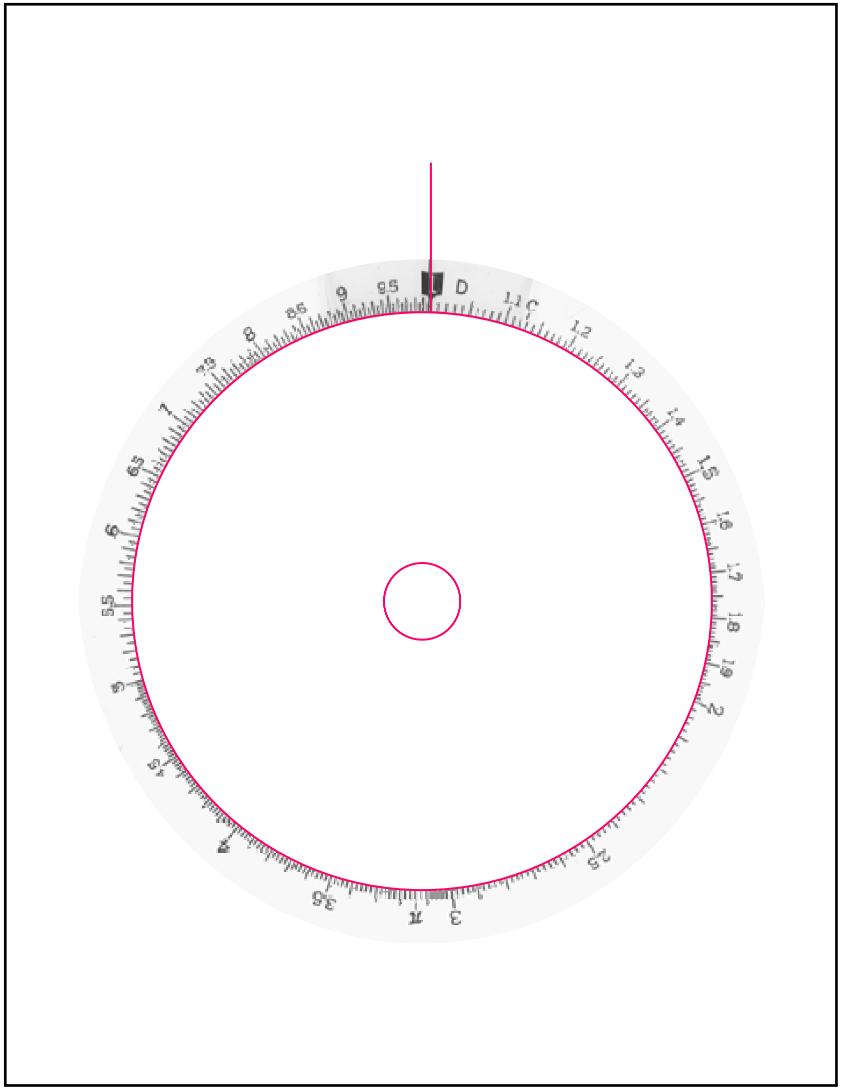


【CDに録音された曲名】

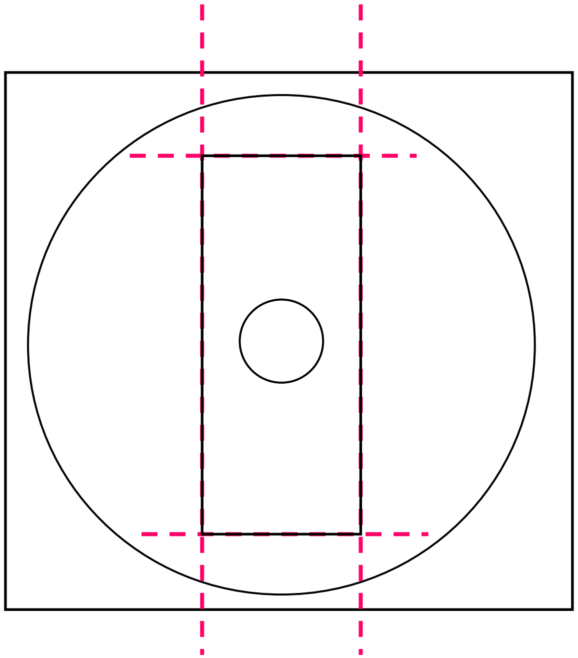
1. アルハンブラの想い出　（タレガ）
2. 「さくら」変奏曲　（横尾幸弘）
3. ワルツ第３番(Op.8-3)　（バリオス）
4. フリア・フロリダ　（バリオス）
5. ワルツ第４番(Op.8-4)　（バリオス）
6. 郷愁のショーロ　（バリオス）
7. ショーロ第１番　（ヴィラロボス）
8. マズルカ・ショーロ　（ヴィラロボス）
9. モーツァルトの魔笛の主題による変奏曲（ソル）
10. アストゥーリアス　（アルベニス）
11. 暁の鐘　（サインス・デ・ラ・マーサ）
12. サンバースト　（ヨーク）
13. タンゴ・アン・スカイ　（ディアンス）
14. 愛のワルツ　（ノイマン）
15. エストレリータ　（ポンセ）

家庭のCDプレーヤーで聴くことができます

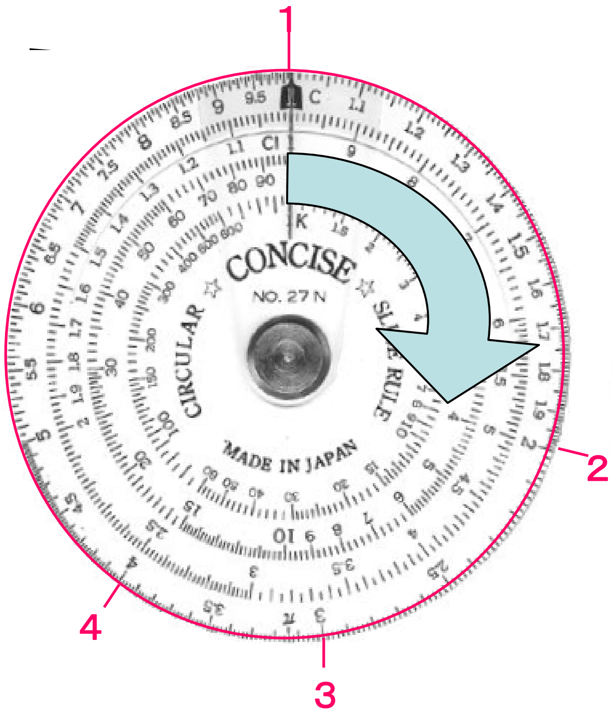
円形計算尺の外側

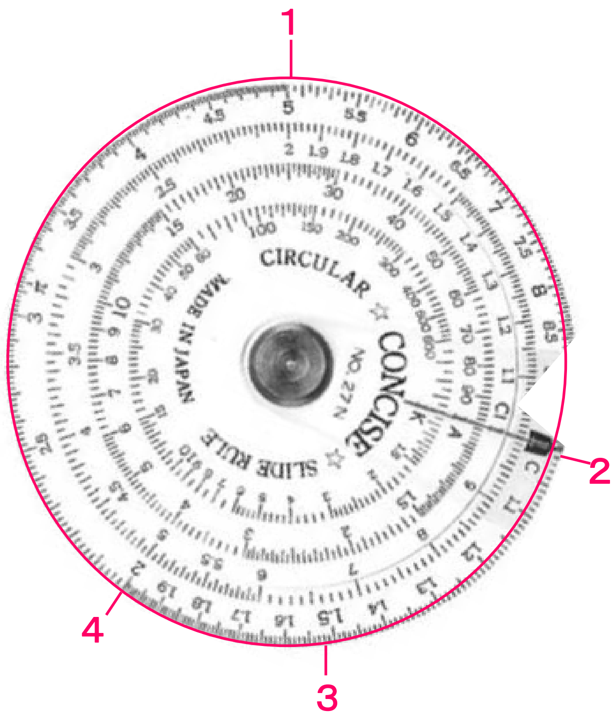


中心軸はCDのケースを切って作る

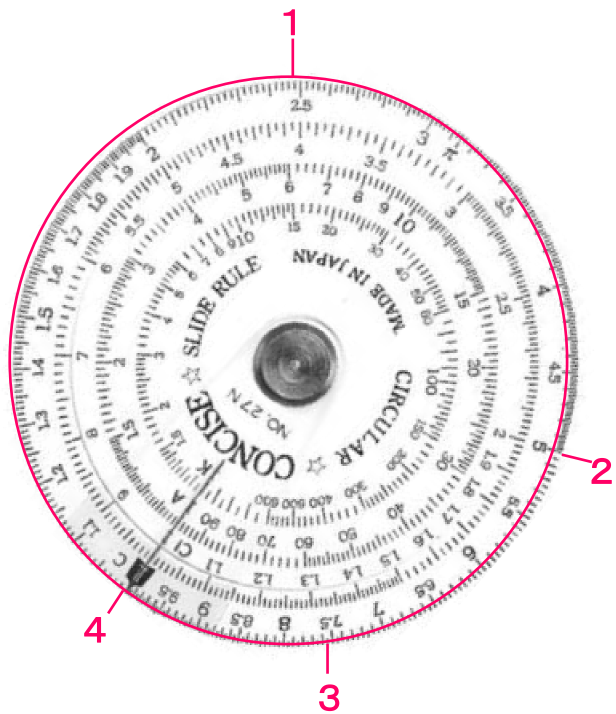


円形計算尺による掛け算





2×2＝4



4×5＝20

今日学んだこと

電卓であそぼう　おもしろい数の性質

無限の足し算（級数）　無限はふしぎ

有理数と無理数　無限に続く小数

計算尺を作ろう　掛け算や割り算が簡単にできる