

# 物質科学ことはじめ(その3)

## 奇妙な量子の世界



物性研究所  
家 泰弘

# 物質科学ことはじめ

第4回(5月7日)

現代社会と物質科学

第5回(5月13日)

原子・分子・物質の構造

物質の個性(物性)はどこから生まれるか

第6回(5月20日)

奇妙な量子の世界

# 今日のおはなし

- 量子論の成立
- 量子力学のサワリ
- 量子干渉
- 巨視的量子現象
  - ボース凝縮
  - 超流動
  - 超伝導
- まとめ

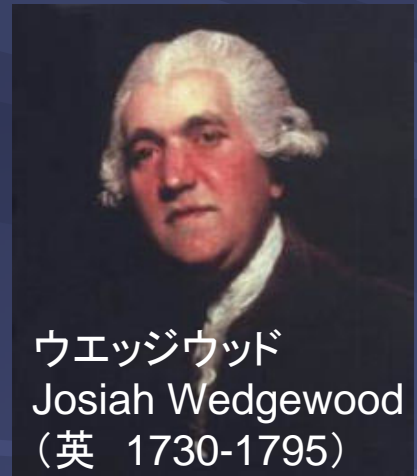


# 量子論の成立

# ティーカップから量子論



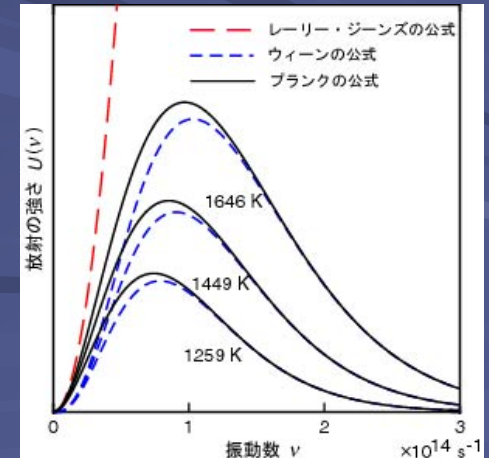
ウェッジウッド社を設立して作陶事業を展開.  
窯の色から温度を推定できるようにするために,  
高温の炉の温度を測定するパイロメーターを開発.



ウェッジウッド  
Josiah Wedgwood  
(英 1730-1795)

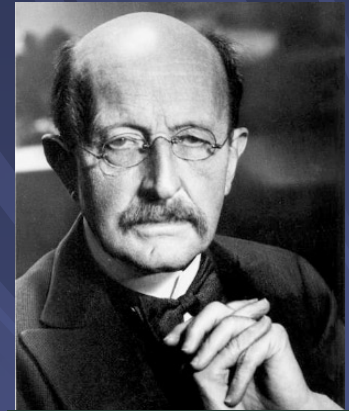
高温の物体が発する光 (黒体放射)  
物体の温度が高いほど, 発せられる光のピーク  
は短波長(青色)側にずれる.

製鉄業などで, 高温炉の温度  
測定・温度制御が技術課題に

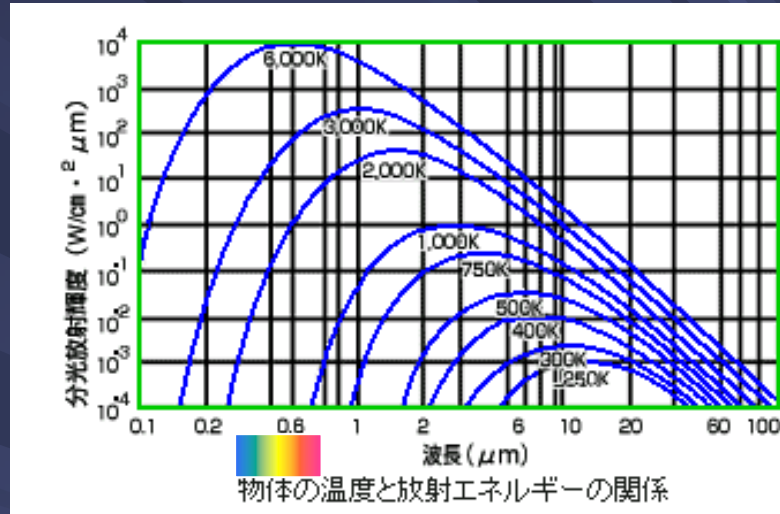
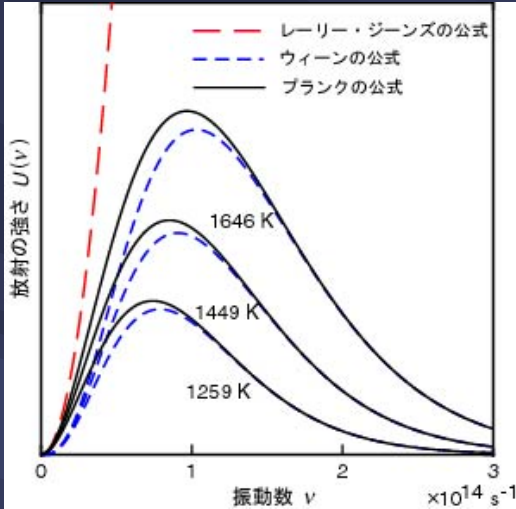


余談: ジョサイア・ウェッジウッドの娘スザナ  
はチャールズ・ダーウィンの母.

# プランクの量子仮説



マックス・プランク

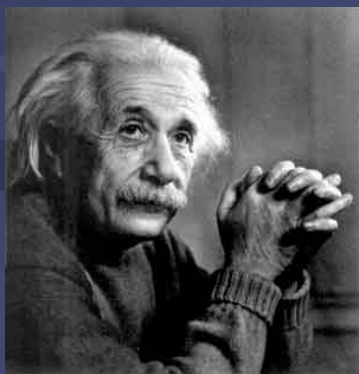


プランクの式

$$U(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{C^3} \frac{K\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1} d\nu$$

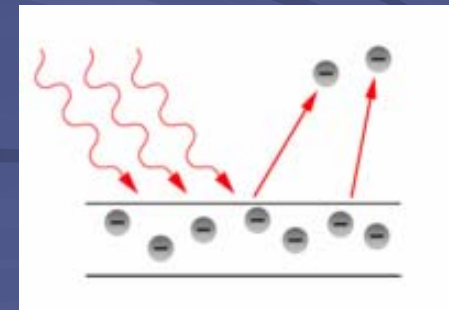
$E=h\nu$   $h = 6.62 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$   
 プランク定数

プランク自身は、量子仮説を便宜的なものと考えていた



アインシュタイン (Albert Einstein)  
 光電効果を光量子仮説により説明

アインシュタインへのノーベル賞は  
 「光量子仮説」に対して授与された



# 物質波

光が粒でもあるのだとすれば、  
電子のような粒子が波であってもよいのでは？

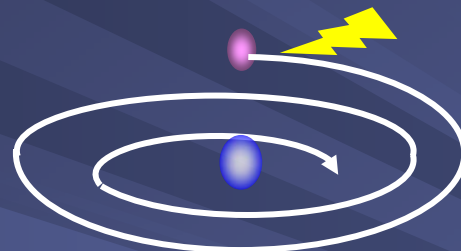
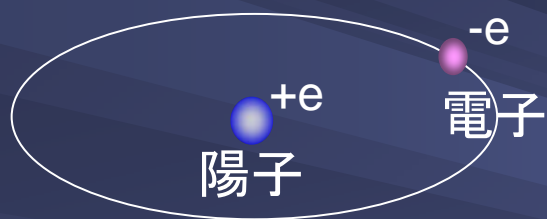
ド・ブロイ(de Broglie)波長

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

運動量



ラザフォードの原子模型

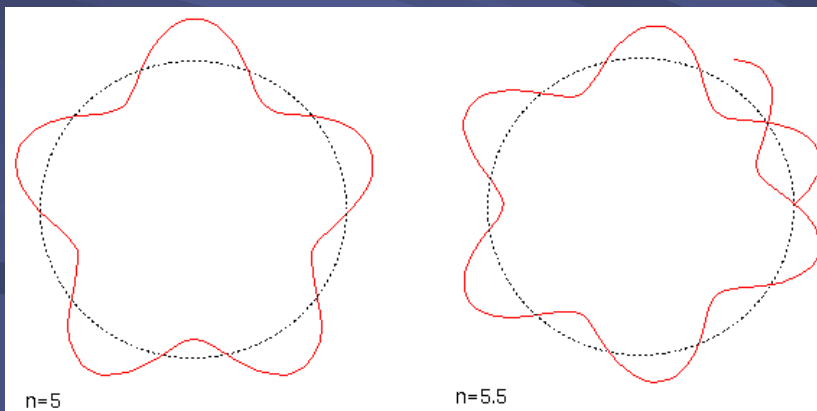


古典論では、円運動する  
電子は電磁波を放射して  
エネルギーを失う

円軌道に波長の整数倍  
がちょうど収まる条件

$$2\pi r = n\lambda$$

ボーアの量子化条件



電子がこのような軌道にある限り、原子は安定

# バルマー系列

水素原子が発する光のスペクトルの一連の輝線の波長の規則性に着目

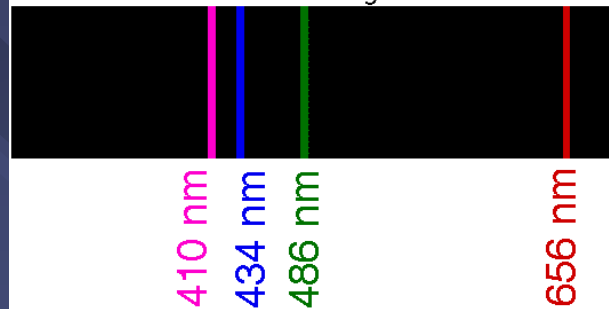
一連の波長は次の経験式で表される

$$\lambda = f \left( \frac{n^2}{n^2 - 4} \right)$$

$$f = 364.56 \text{ nm}, \quad n = 3, 4, 5, 6$$

多分, さまざまな試行錯誤の結果

Hydrogen emission spectrum in the visible region



バルマー(1825-98)

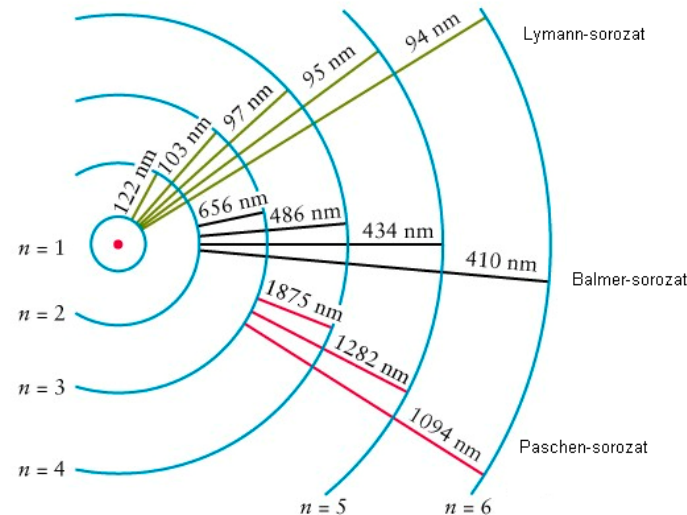
ボーアの水素原子模型(前期量子論)による見事な説明

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$R = \frac{m_e e^4}{8ch^3 \epsilon_0^2} = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$



ボーア(1885-1962)





# 量子力学

# 波動関数



シュレーディンガー

粒子の状態は波動関数  $\psi(x, y, z, t)$  によって記述される

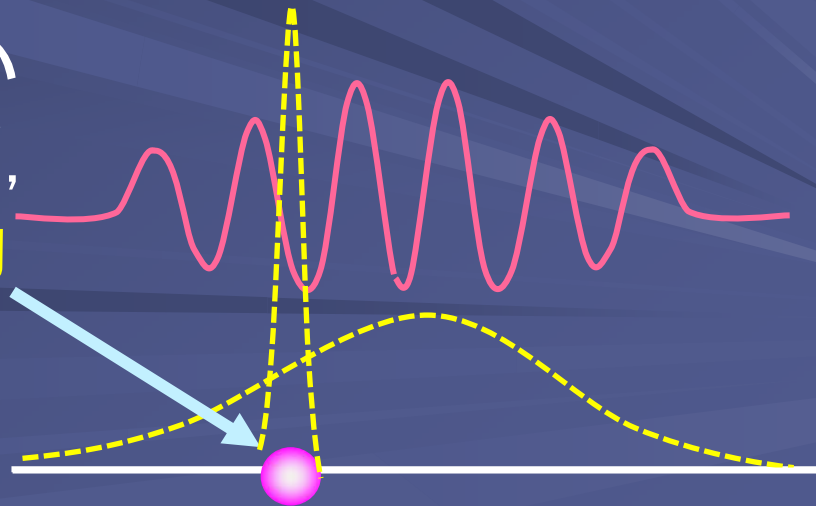
粒子の存在確率は  $|\psi(x, y, z, t)|^2$  で与えられる

波動関数の時間発展はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi(x, y, z, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(r) \right) \psi(x, y, z, t) \quad \text{に従う}$$

波動関数は空間的に広がっているが、粒子の位置を測定すれば、どこかの1点に見出される(波動関数の収縮)。測定結果の確

率分布は  $|\psi(x, y, z, t)|^2$



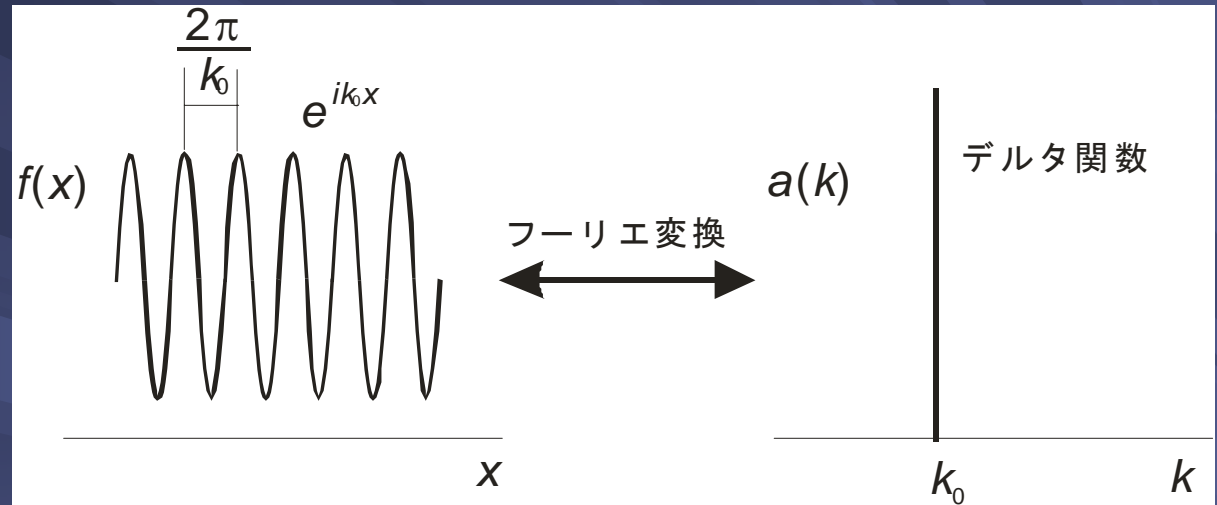
# 不確定性関係



量子力学的粒子の位置と運動量との間には不確定性関係  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$  がある

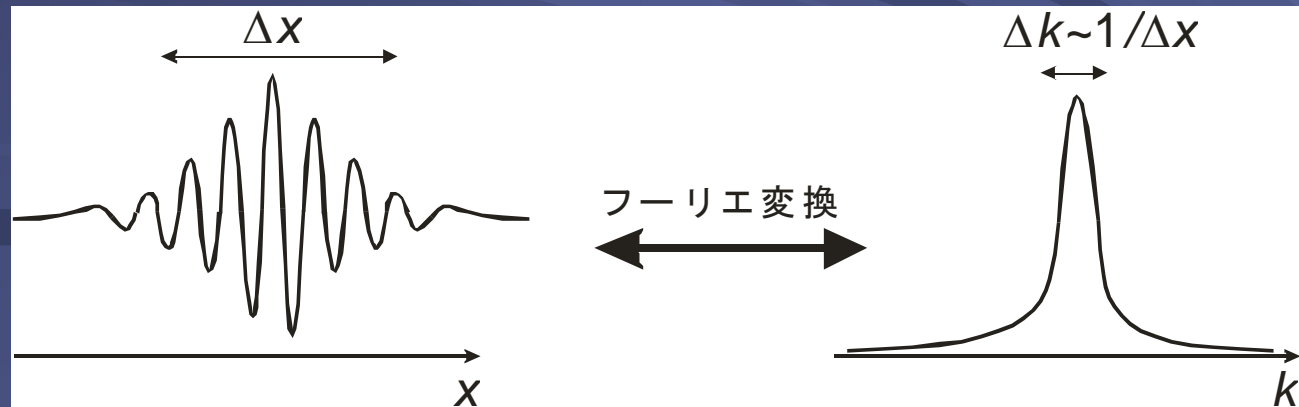
運動量  $p = \hbar k_0$  が  
確定した状態  
(平面波)

$$\psi(x) = e^{ik_0 x}$$



波束

$$\psi(x) = \sum_k c(k) e^{ikx}$$

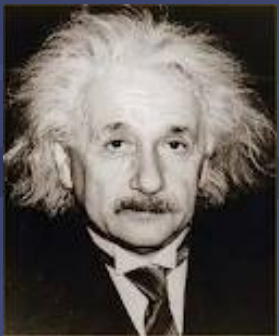


# 量子力学における測定

量子力学は、波動関数で与えられる「状態」について、ある物理量の測定を行ったときの測定値の確率分布を与える。個々の測定においてどのような値が得られるかは本質的に確率的であって、予測不能である。（量子力学の確率解釈）



ある物理量の測定の結果、状態はその物理量の固有状態の一つになる ⇒ 「状態(波動関数)の収縮」

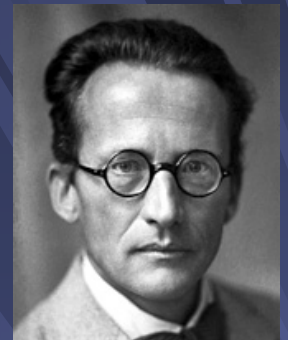


アインシュタインはこれに異を唱えた。  
実際の状態は確定しているはずで、量子力学がそれを記述できないのは、不完全な理論体系であることの反映と見ていた。

「神はサイコロを振らない」

# シュレーディンガーの猫

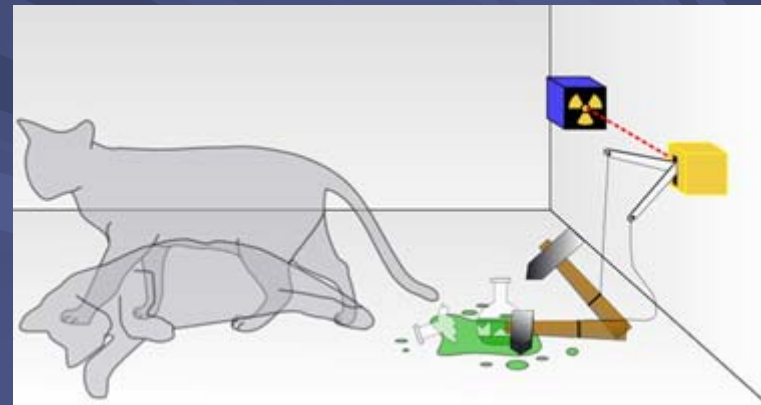
測定（観測）前の状態が「異なる状態の重ね合わせ」というのはミクロな系については納得できないこともないが、それをマクロな系に適用すると実に奇妙なことになる。



シュレーディンガー



箱の中で放射性原子核の崩壊が起こってアルファ線が出るとガイガーカウンターが作動し、毒ガス入りの瓶が割れる仕掛けになっている。この箱の中に入れられた猫の生死は原子核崩壊の有無と絡み合っている。



系全体の波動関数＝

(原子核既崩壊)・(猫死)＋(原子核未崩壊)・(猫生)

箱を開けた瞬間に(猫死)か(猫生)のどちらかに収縮？

# 量子力学の観測問題

量子力学の標準的解釈(コペンハーゲン解釈)

- ① シュレーディンガー方程式に従うユニタリー時間発展
- ② 観測による状態(波動関数)の収縮

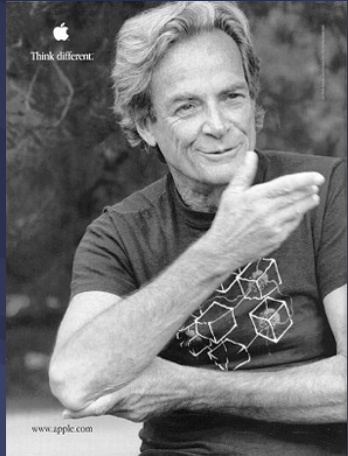
⇒ ①は自然だが, ②はご都合主義で導入した感じで不自然だし, 定式化できない.

エヴェレットによる多世界解釈

観測による状態の収縮など起こらず, 観測によって異なる結果が得られるような世界が多重に併存する.

⇒ 論理的非整合性は回避できるかもしれないが, あまりにも奇妙な世界観.

# ファインマンの言葉



我々の言語は、日常生活で経験するようなことを言い表すために作られたのだから、原子の内部で起こっていることを表現できなくても驚くにあたらない。我々は、波動や粒子と言った言語表現と結びついたイメージを頭に描いて理解しようとするが、そのようなアナロジーはいずれも不完全であり、光や電子のいわゆる二重性は言語の限界によるものである。幸い、数学はそういう言語の制約を受けないから、数学的スキームでは原子を的確に記述できる。それが量子力学である

I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics.

量子力学を「理解」している人なんて誰もいないと言って差し支えないと思う。

# 量子力学の位置づけ

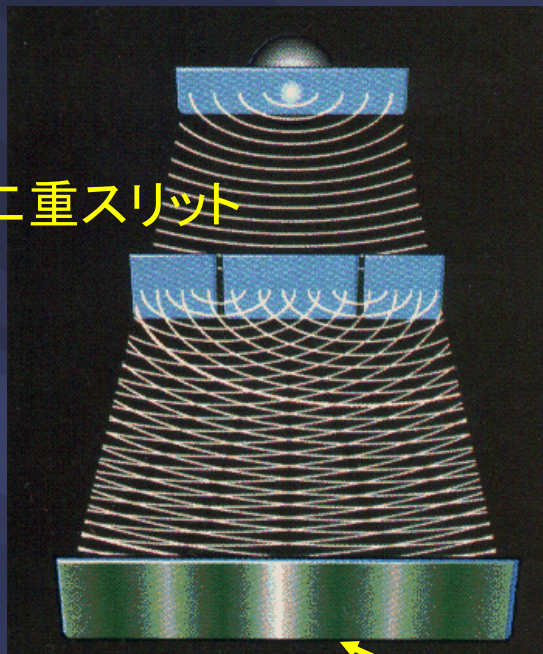
量子力学はその哲学的基礎の部分において、観測問題に現れるような、未解決の「気持ちの悪さ」を抱えている。

しかし、量子力学は、これまでに用いられたあらゆる局面において、現象の精密な記述に大成功を収めている。



# 量子干涉

# ヤングの二重スリット実験



トマス ヤング  
(1773-1829)

「万能の人」

医師(ロンドンで開業)

物理学者(王立協会の自然哲学教授)

語学の天才

古代エジプト象形文字の解読に取り組む

ヤング音律(鍵盤楽器の調律法)を考案

干渉縞

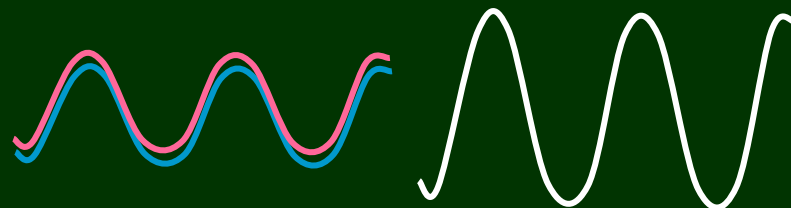
光の干渉実験

光が「波」であることの証明

当時、光の粒子説(ニュートン)と波動説(ホイヘンス)があり、決着がついていなかった

干渉効果

2つの波の重ね合わせ



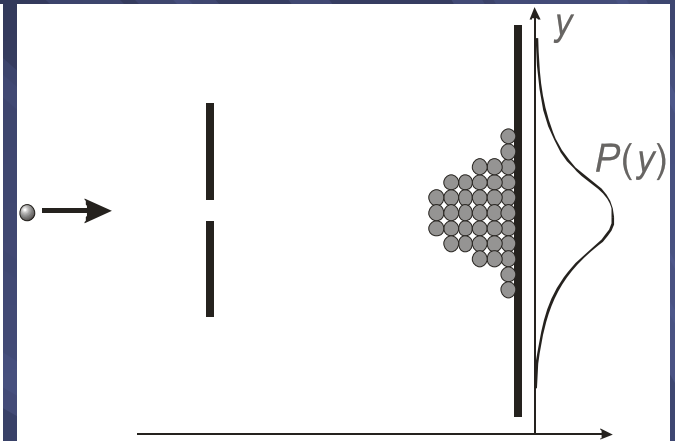
同位相 → 強め合う



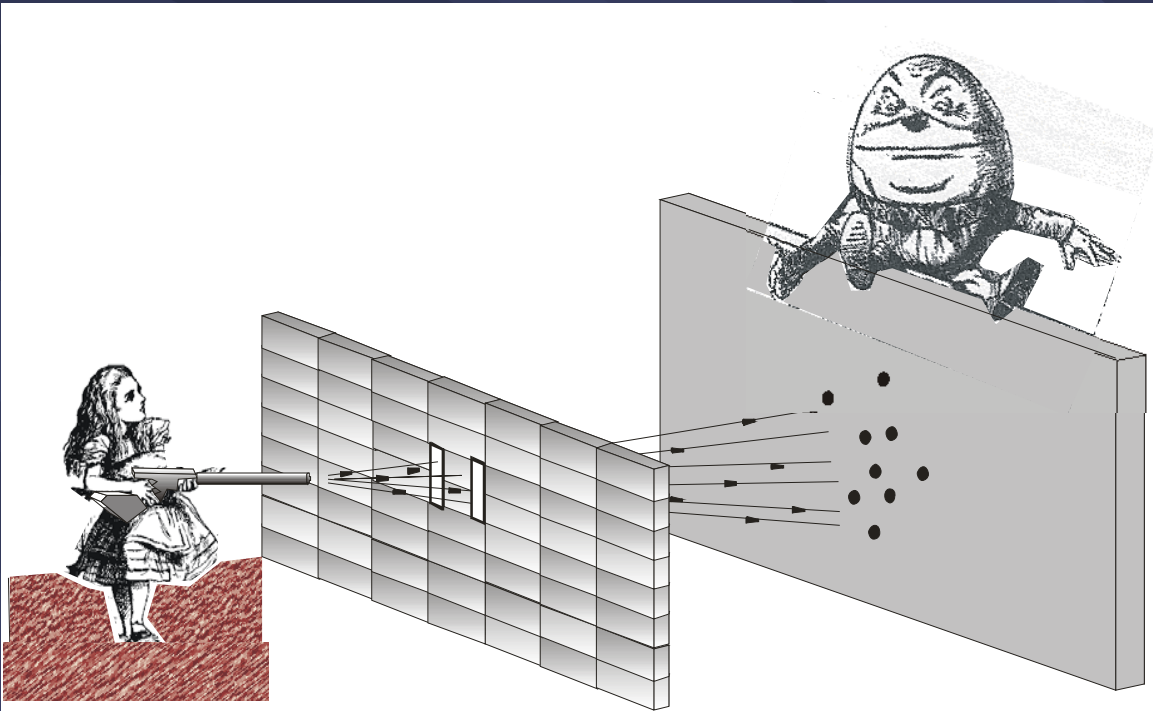
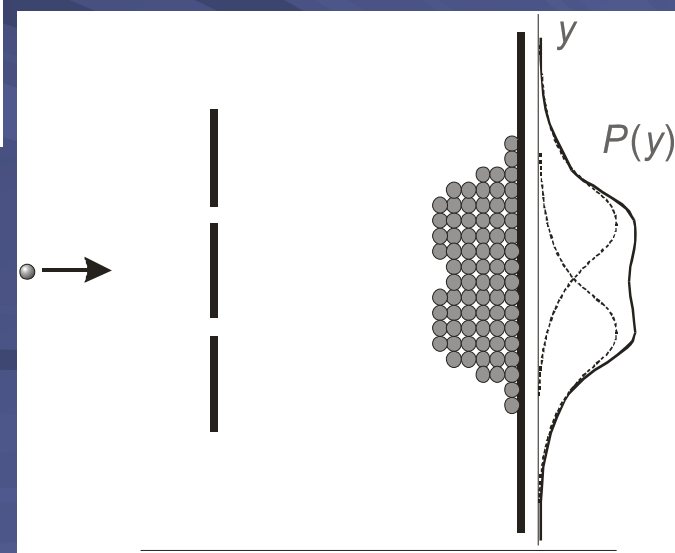
逆位相 → 打ち消し合う

# 古典粒子の場合

1つのスリット



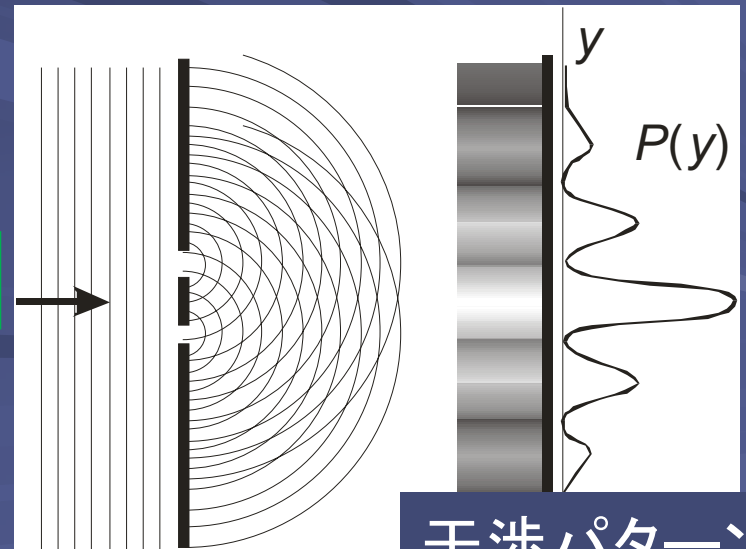
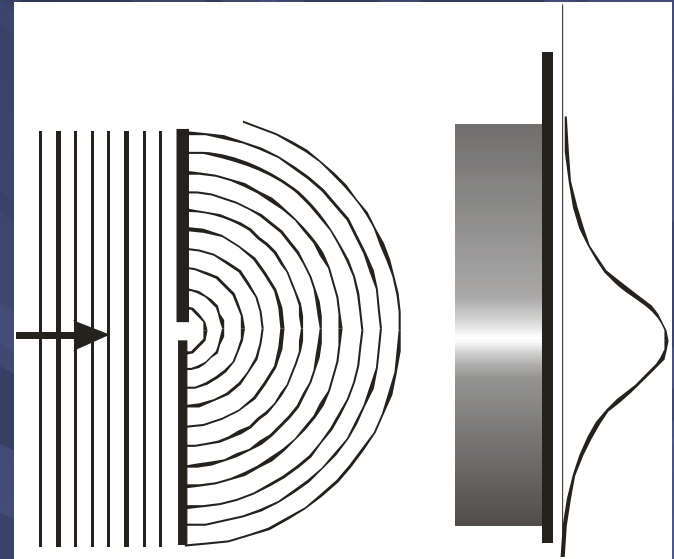
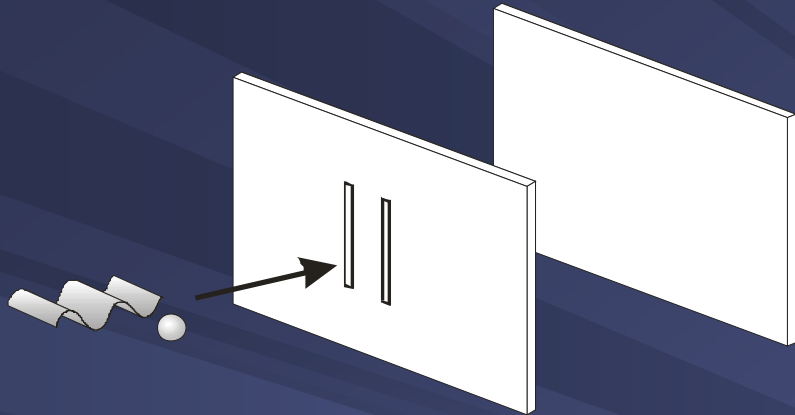
2つのスリット



ある場所に弾丸が到達する確率  
= 右のスリットを通過してそこに来る確率  
+ 左のスリットを通過してそこに来る確率

$$P_{\text{total}}(y) = P_{\text{R}}(y) + P_{\text{L}}(y)$$

# 波を入射させる



干渉パターン

$$\Psi_{\text{total}} = \Psi_{\text{R}} + \Psi_{\text{L}}$$

波動関数 =

右側のスリットを通る波動関数  
+ 左側のスリットを通る波動関数

確率 = | 波動関数 |<sup>2</sup> 量子干渉項

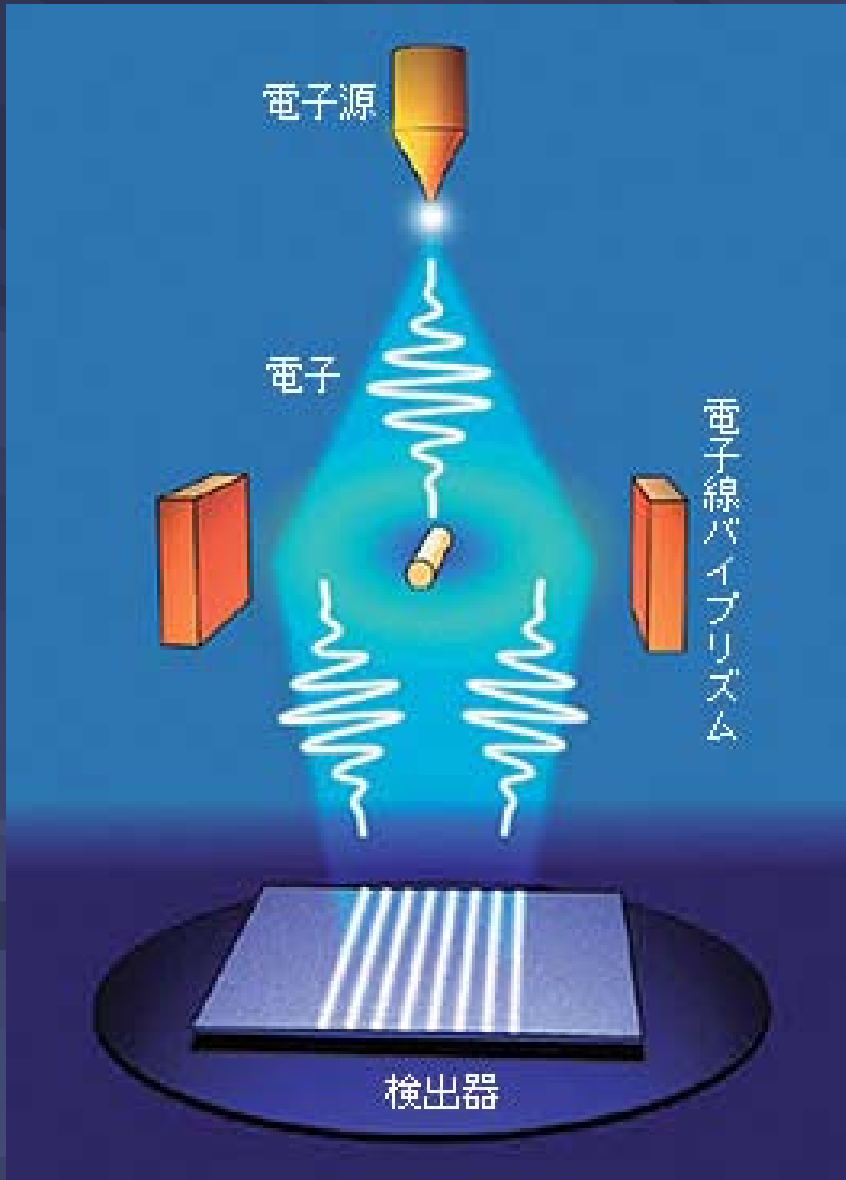
$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{total}}|^2 &= |\Psi_{\text{R}} + \Psi_{\text{L}}|^2 \\ &= |\Psi_{\text{R}}|^2 + |\Psi_{\text{L}}|^2 + \underbrace{\Psi_{\text{R}}^* \Psi_{\text{L}} + \Psi_{\text{R}} \Psi_{\text{L}}^*}_{\text{量子干渉項}} \end{aligned}$$

# 電子を使った二重スリット実験



外村 彰博士  
(日立基礎研究所)

ホログラフィー  
電子顕微鏡



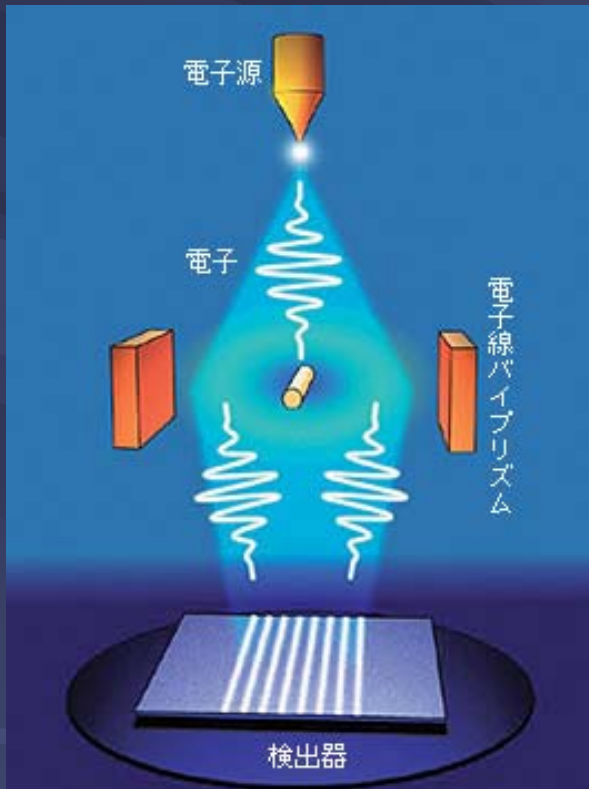


# 電子の干渉

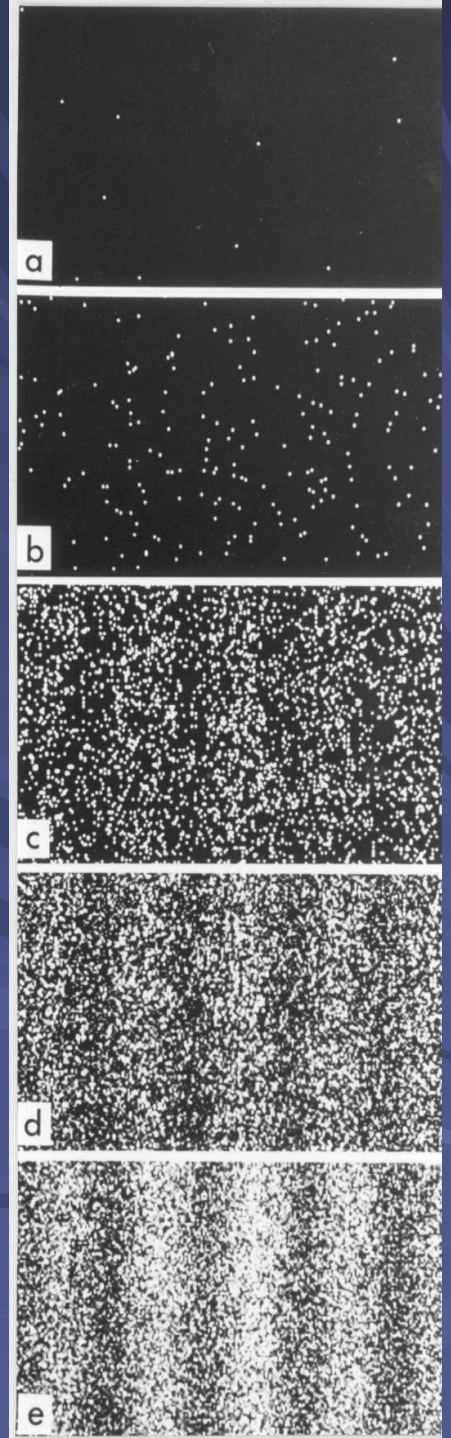
電子は1個1個  
スクリーンに到達する

干渉縞が現われる

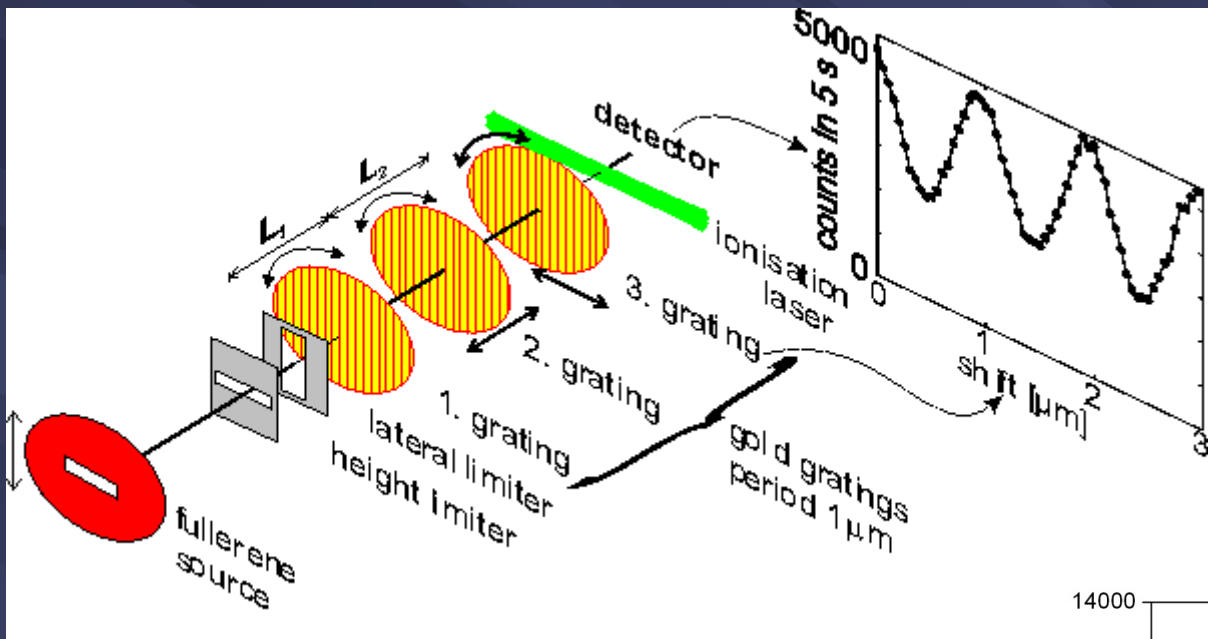
電子の波動性の  
鮮やかな実証



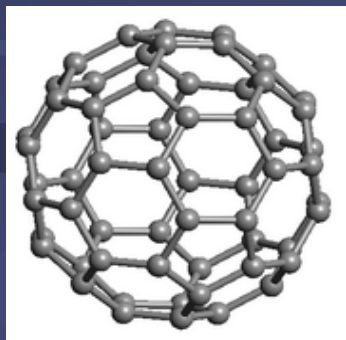
外村 彰博士  
(日立基礎研究所)



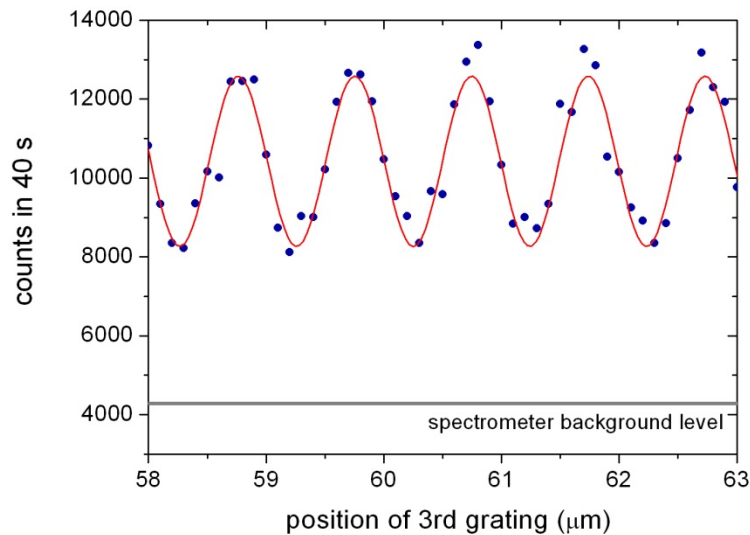
# どのくらい大きなものまで干渉する？



A. Zeilinger  
ウィーン工科大学



C<sub>60</sub>





# 巨視的量子現象

ボース凝縮・超流動・超伝導

# 量子力学的粒子

同種の量子力学的粒子は本質的に識別できない  
(電子はどれも同じ)

2個の同種粒子を交換した状態は元と同じ  
(ただし, 波動関数には一般に数因子がつく)



$$\Psi(b,a) = C\Psi(a,b)$$

$$\Psi(a,b) = C\Psi(b,a) = C^2\Psi(a,b)$$

$$\Rightarrow C^2 = 1$$

$$\Rightarrow C = 1 \text{ または } -1$$

ボース粒子

フェルミ粒子

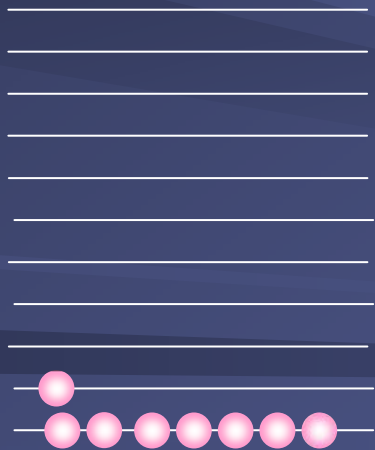
# 量子統計

ボース粒子 (ボソン)

スピン: 0, 1, ...



$$\Psi(b,a) = \Psi(a,b)$$



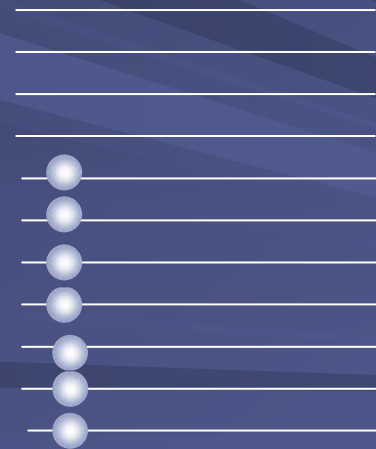
同じ状態にいくつでも入れる

フェルミ粒子 (フェルミオン)

スピン: 1/2, 3/2, ...



$$\Psi(b,a) = -\Psi(a,b)$$



a=bならば

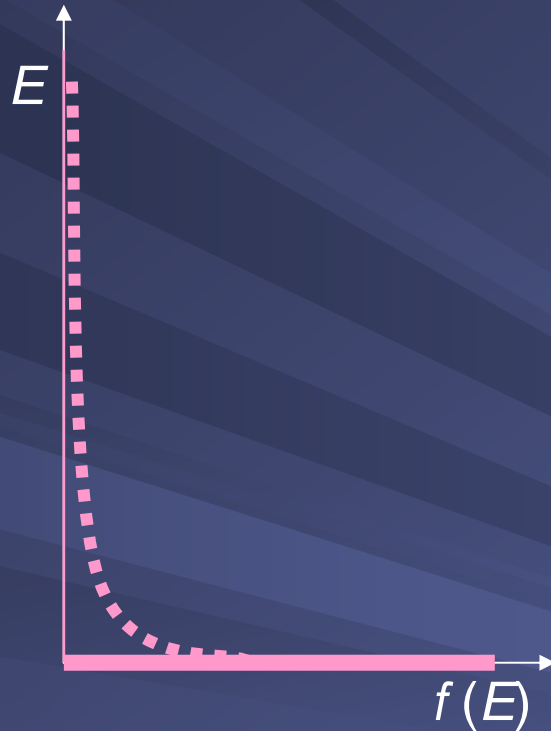
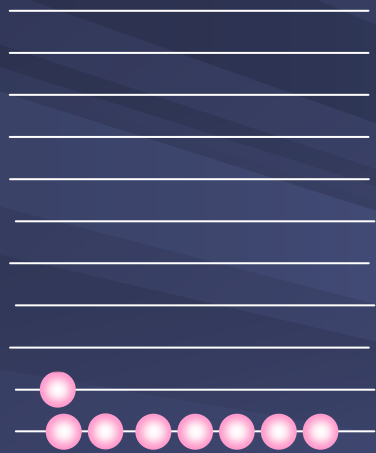
$$\Psi(a,a) = -\Psi(a,a)$$

$$\Psi(a,a) = 0$$

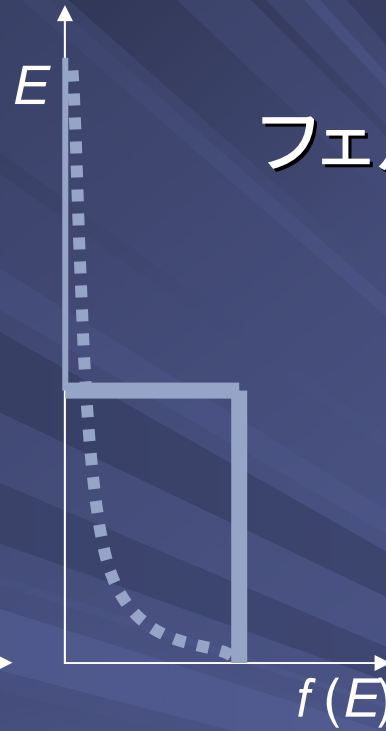
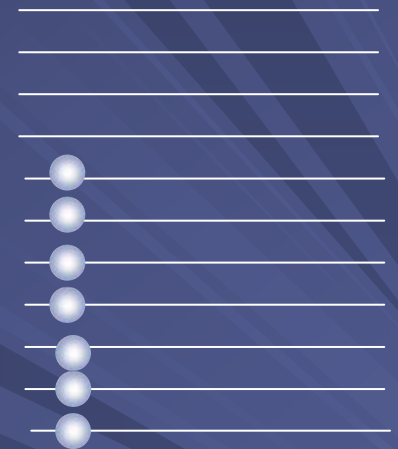
同じ状態には1個しか入れない  
(パウリの排他律)

# ボース・アインシュタイン分布と フェルミ・ディラック分布

ボース粒子



フェルミ粒子

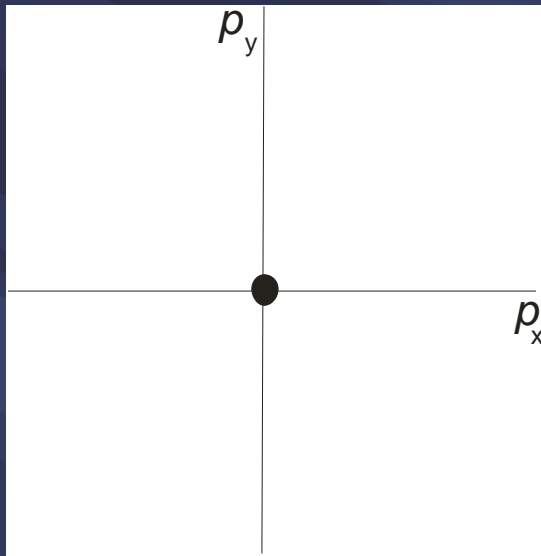


高温極限ではどちらの場合でも  
マクスウェル・ボルツマン分布

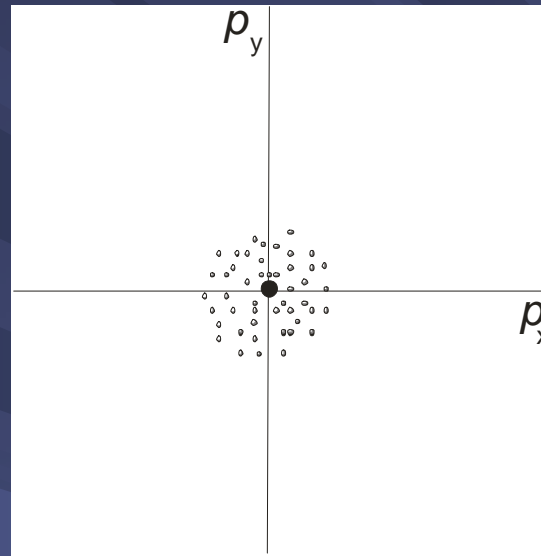
$$f(E) = e^{-(E-\mu)/k_B T}$$

冷却原子気体の  
ボース・  
アインシュタイン凝縮

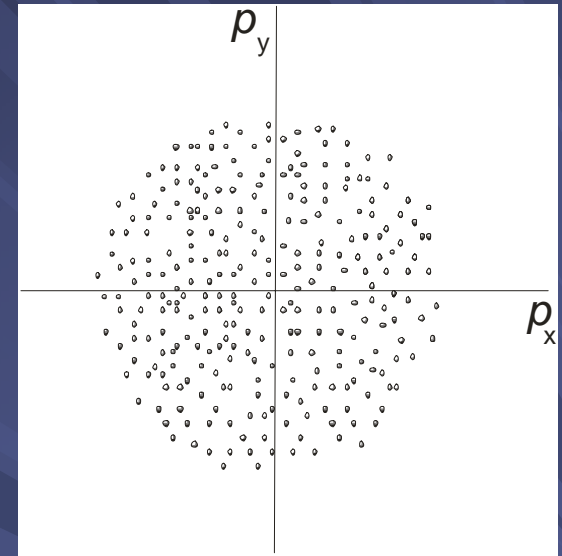
# ボース・アインシュタイン凝縮



$T = 0$



$T = T_{BE}$



$T > T_{BE}$

熱的ド・ブロイ波長

$$\lambda_T = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{1/2}$$

熱的ド・ブロイ波長が粒子の間隔程度になるとボース凝縮

$$T_{BE} = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left( \frac{n}{2.612} \right)^{\frac{2}{3}}$$

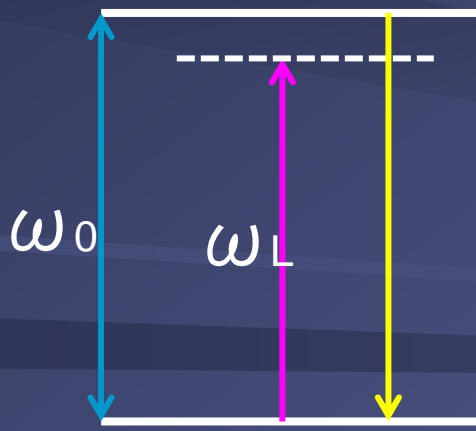
# 原子気体のレーザー冷却

原子(たとえばRb)の気体(蒸気)をトラップに溜めて冷やす

## ドップラー冷却



原子の共鳴振動数  $\omega_0$  よりわずかに低い振動数  $\omega_L$  の光を照射する.



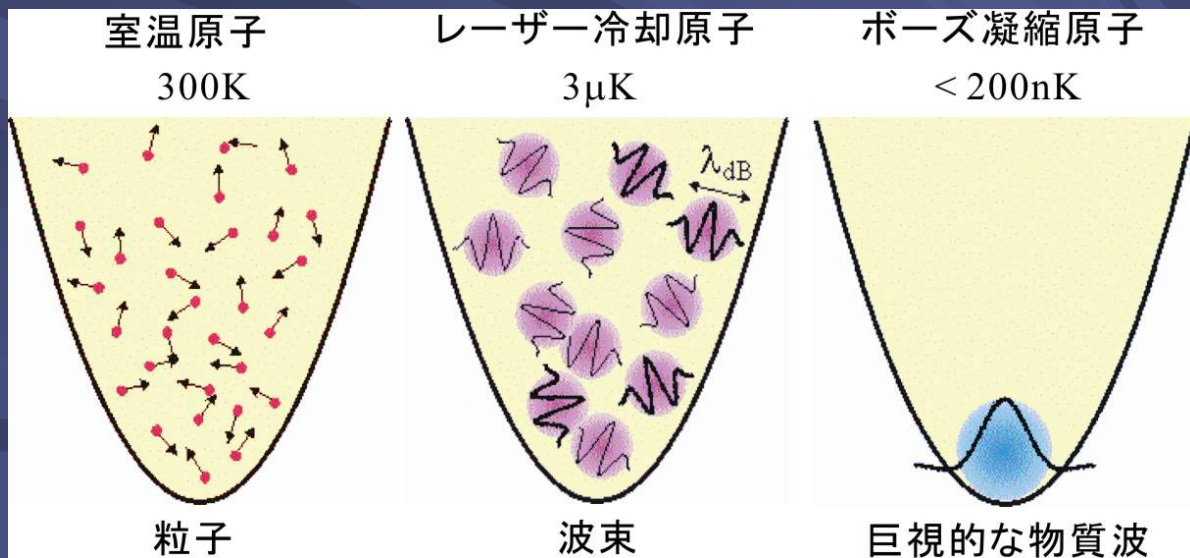
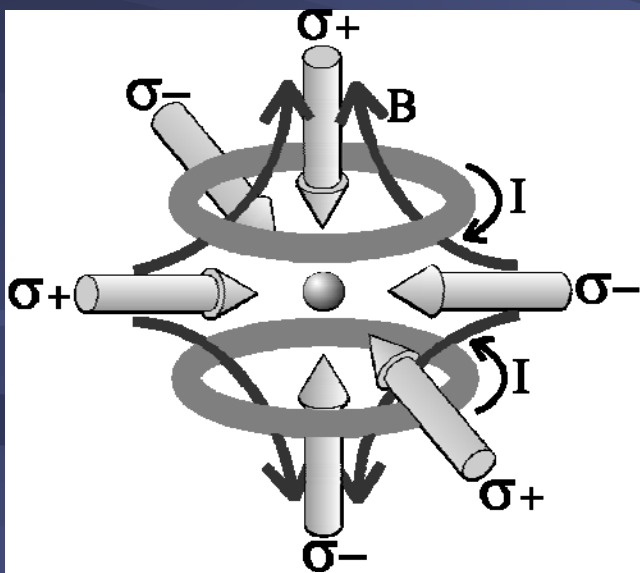
光と逆向きに走っている原子にとってはドップラー効果によってこの光の振動数が高く見えて共鳴に近くなり, 吸収確率が高くなる. 光の運動量を吸収することにより原子は減速される.

光を再放出するときには等方的に放出されるので, 平均として原子は減速される.

# 冷却原子気体

6本のレーザービームを  $x, y, z$  の正負から照射することによってあらゆる方向についてドップラー冷却が起こる。  
ドップラー冷却の限界は  $T \sim 100 \mu\text{K}$  程度

⇒ この温度をさらに3~4桁下げる



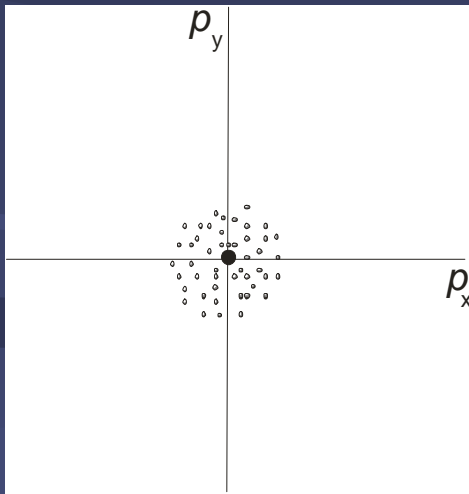


# 原子気体のボース・アインシュタイン凝縮

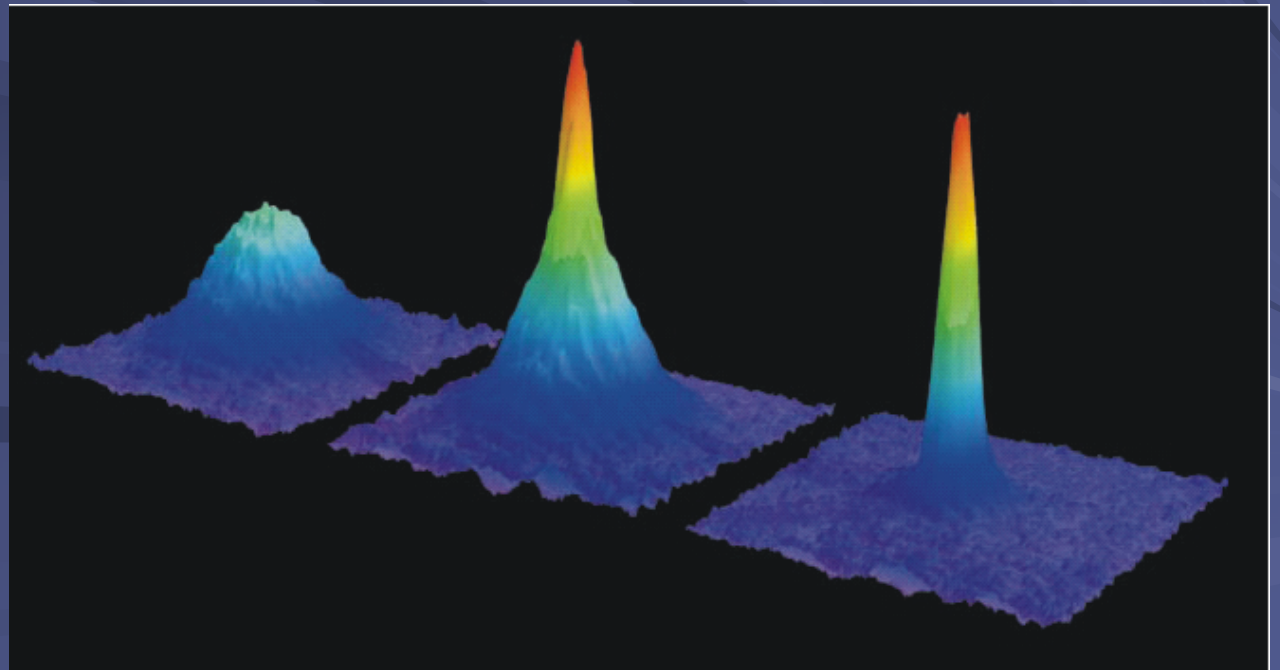
磁気光学トラップに冷却した原子気体を集める  
蒸発冷却によって温度を下げてボース・  
アインシュタイン凝縮の条件を実現する  
 $T \sim 10^{-7}\text{K}$

$$\lambda_T \approx n^{-1/3}$$

トラップを切ると、原子気体は重力で落下しながら  
その速度分布を反映して膨張する

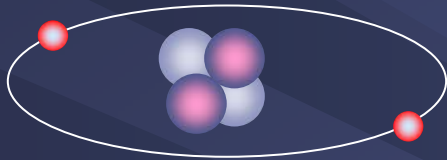


$$T = T_{\text{BE}}$$



# 液体ヘリウムの 超流動

# ヘリウムの同位体

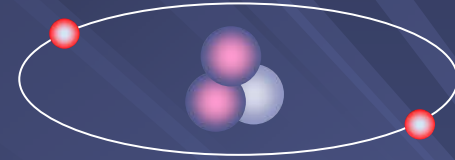


${}^4\text{He}$

陽子 2個  
中性子 2個  
電子 2個

全スピン=0

ボース粒子



${}^3\text{He}$

陽子 2個  
中性子 1個  
電子 2個

全スピン=1/2

フェルミ粒子

# 極低温をつくる

量子統計性が効くような現象を見るには極低温が必要

液体窒素	77K
液体ヘリウム ( $^4\text{He}$ )	4.2K
真空ポンプで減圧	$\sim 1.2\text{K}$
液体ヘリウム3 ( $^3\text{He}$ )	3.2K
真空ポンプで減圧	$\sim 0.3\text{K}$
$^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ 希釈冷凍機	$\sim \text{mK}$
核断熱消磁	$\sim \mu\text{K}$

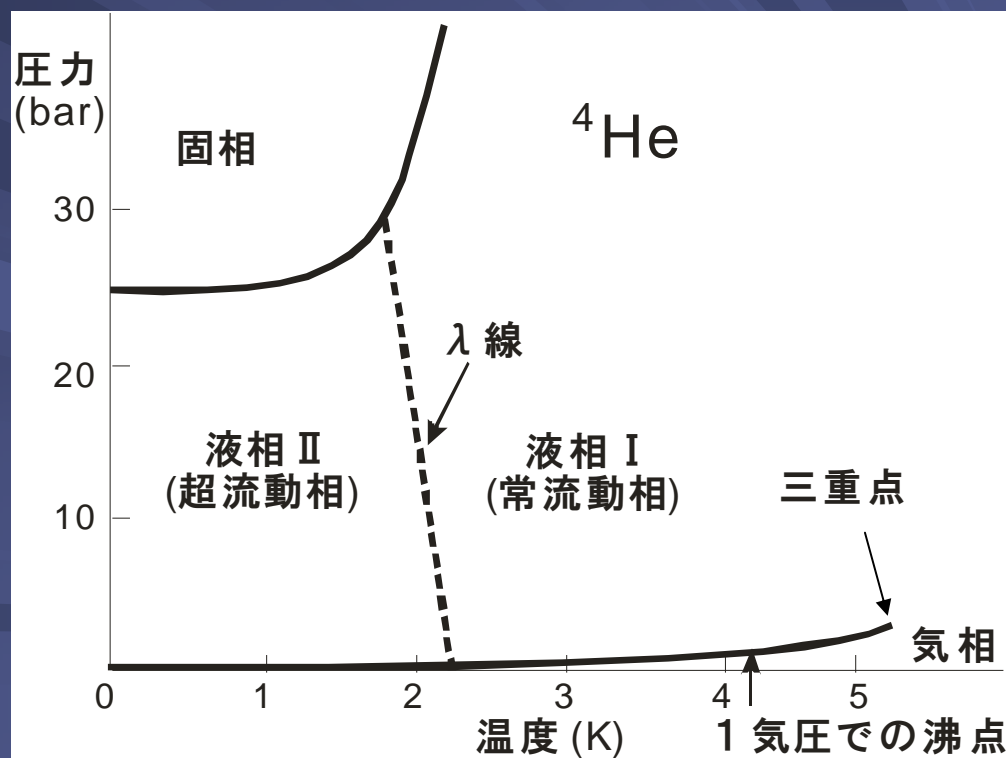
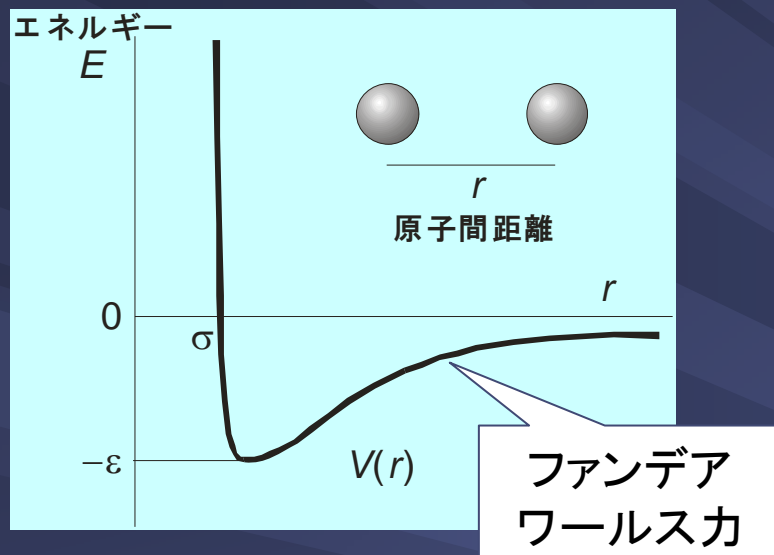


液体ヘリウム容器の  
内部構造



# ヘリウムの相図

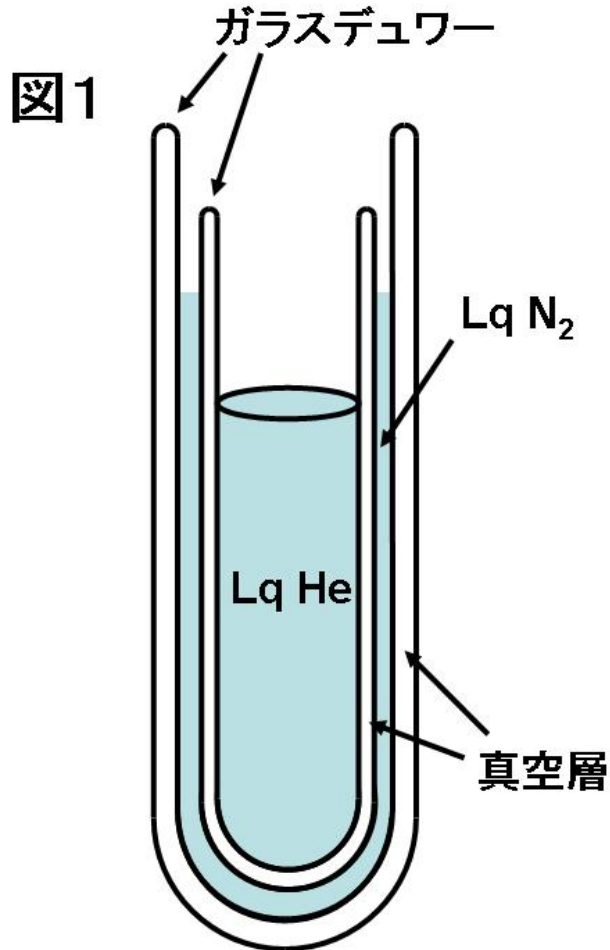
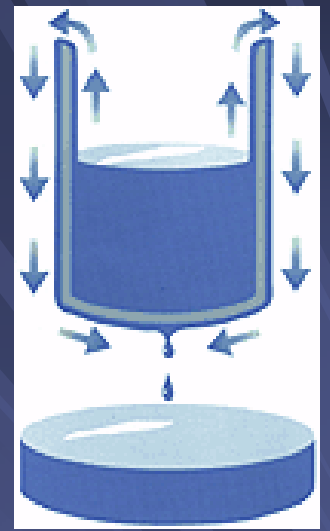
ヘリウムは(常圧では)絶対零度でも固体にならない  
⇒ 量子液体



ヘリウム原子は

- (1) 軽い
- (2) 相互作用が弱い  
運動エネルギー  
＞ 相互作用エネルギー

# 液体ヘリウムの超流動



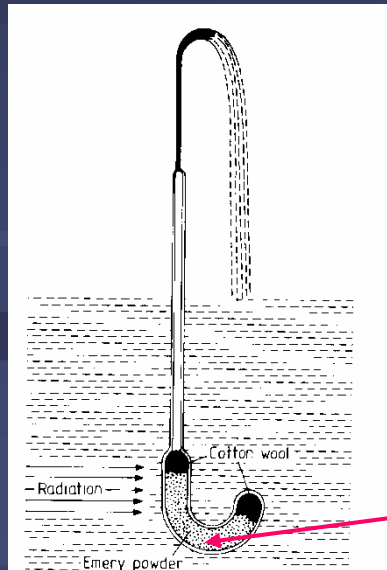
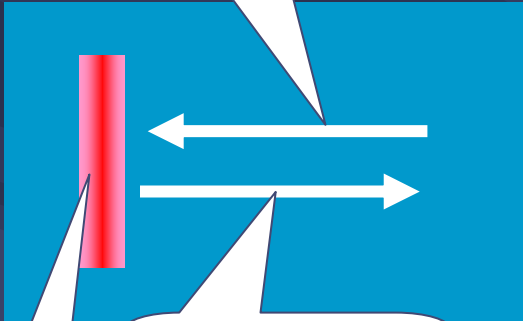
# 二流体モデル

熱機械効果(内部対流)

超流動成分

常流動成分

熱源



噴水効果

東京大学低温センター

通常の液体は通り抜けられないような狭い  
間隙(スーパーリーク)を摩擦なしに流れる

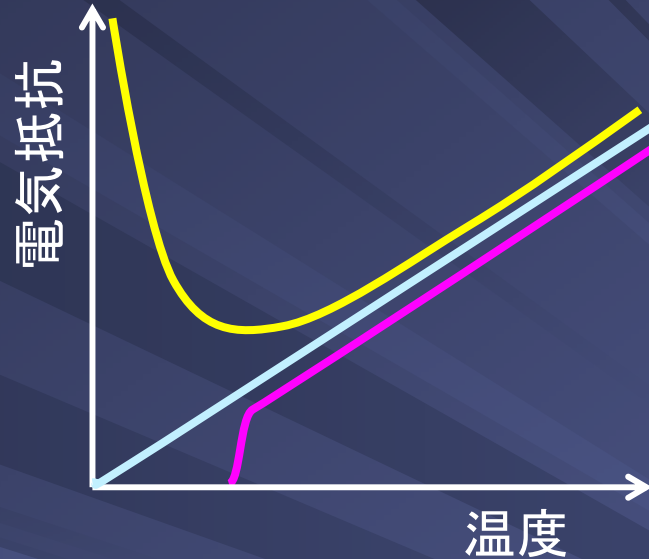
# 超伝導



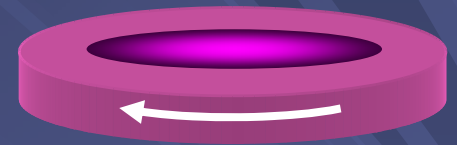
# 超伝導の発見



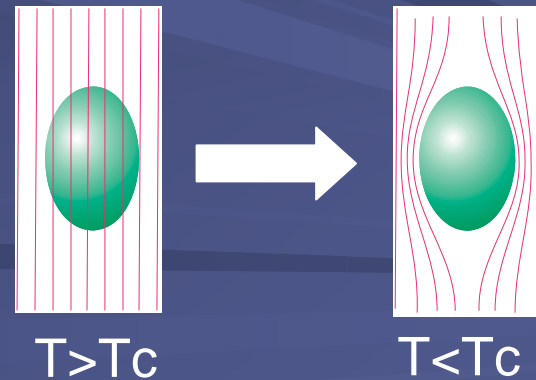
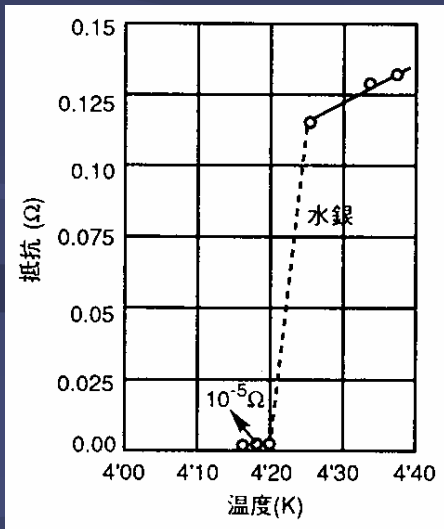
初めてヘリウムの  
液化に成功(1908)



永久電流



完全反磁性 (マイスナー効果)



超伝導状態では磁場が排除される

# 元素の超伝導

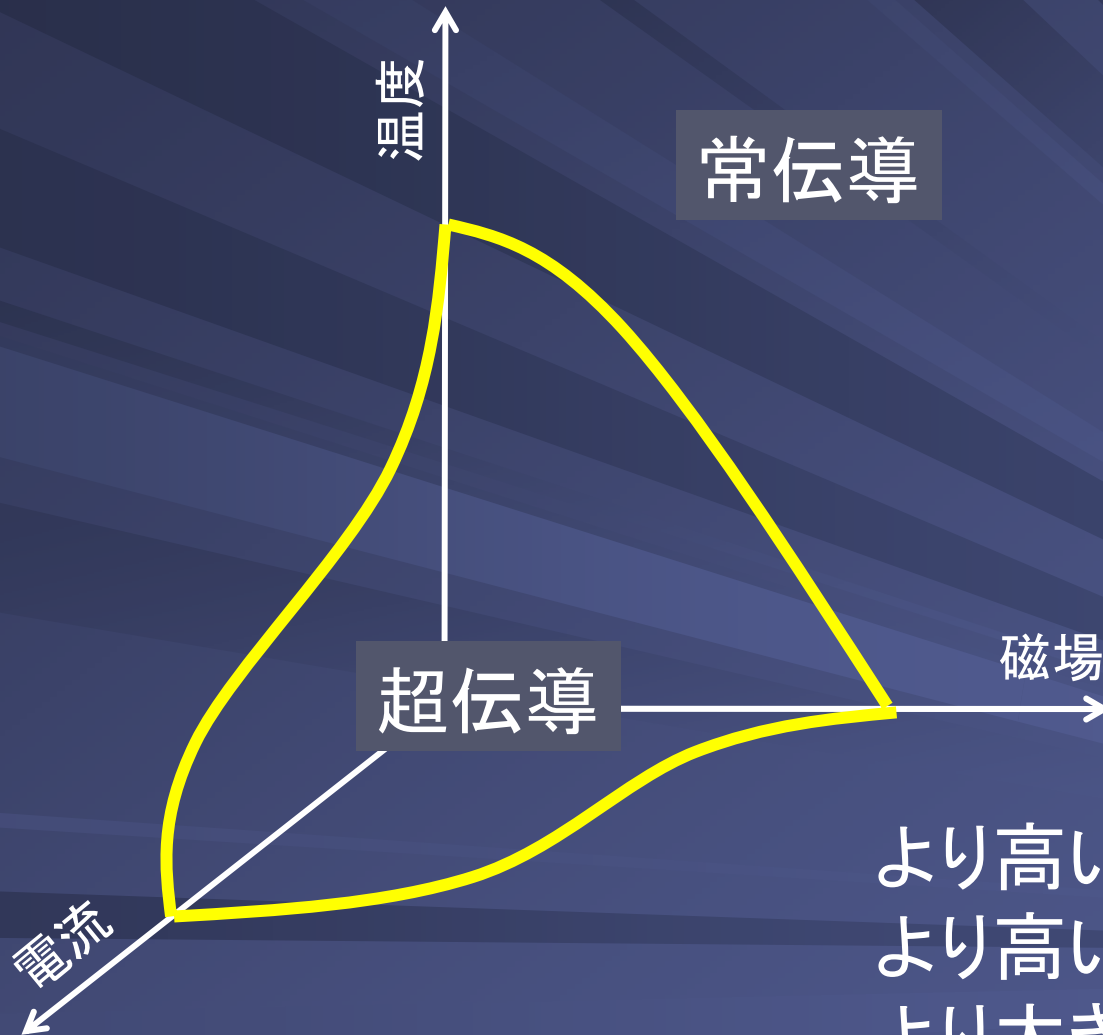
## 元素の超伝導

H																	He
Li	Be											B	C	N	O	F	Ne
Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
Cs	Ba	La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pr	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
Fr	Ra	Ac	Ru	Ha													

Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr

- Al** 通常の結晶形で超伝導になる物質
- Si** 高圧下やアモルファス状態など特殊な条件下でのみ超伝導になる物質
- Cu** 超伝導相が見つかっていない物質

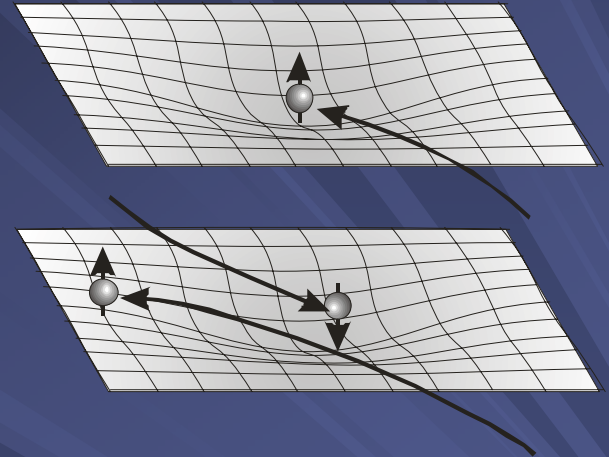
# 臨界温度，臨界磁場，臨界電流



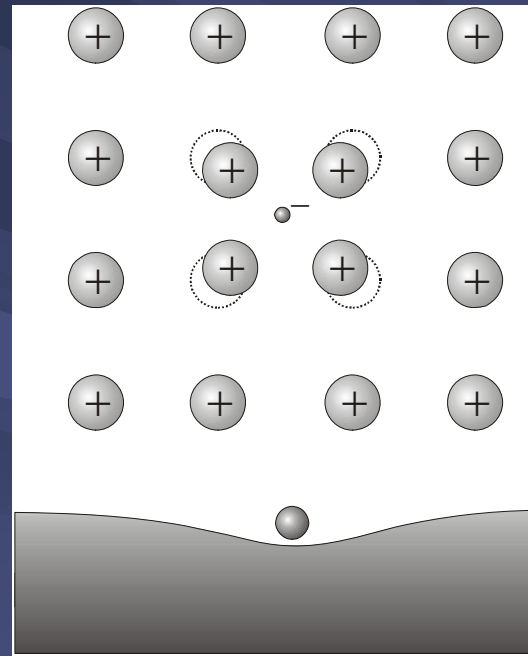
より高い臨界温度  
より高い臨界磁場  
より大きな臨界電流

# 超伝導の機構

引力の起源は？  
電子格子相互作用



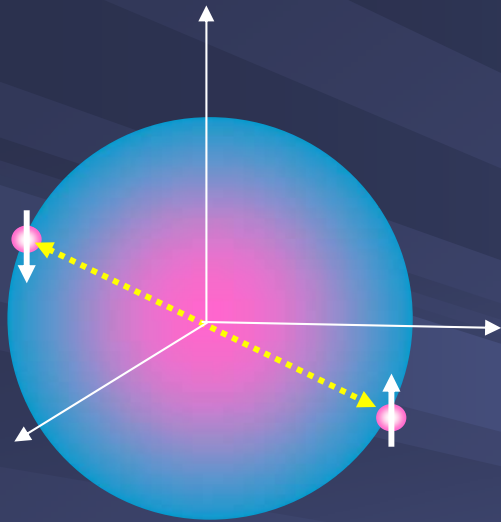
電子格子相互作用を介した電子間引力が電子間のクーロン斥力に打ち勝って正味の引力が働けばよい



超伝導転移温度

$$T_c = 1.14\Theta_D \exp\left(-\frac{1}{N(0)V}\right)$$

クーパ対の形成



フェルミ面上の2個の電子に引力が働くと束縛状態(クーパ対)が形成される.

# バーディーン・クーパー・シュリーファー (BCS)機構

電子間クーロン斥力に  
打ち勝つ電子間引力

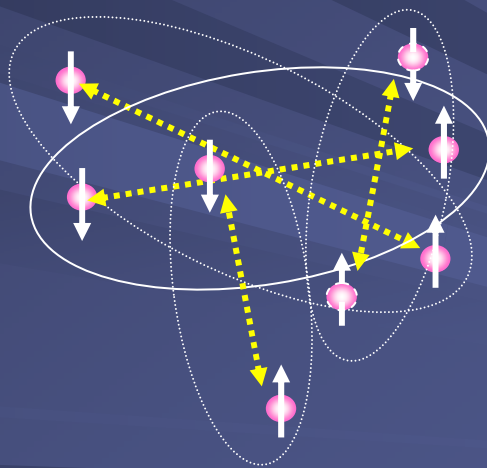
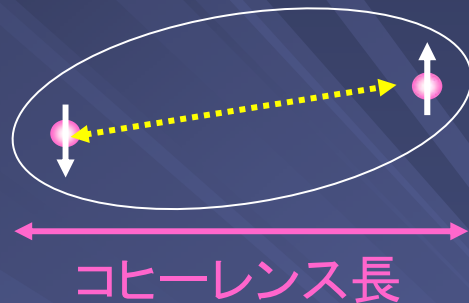


クーパー対の形成

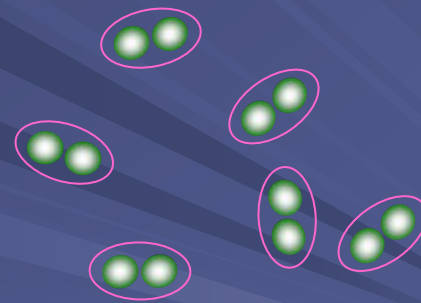


クーパー対のボース・  
アインシュタイン凝縮  
⇒ 超伝導状態

クーパー対の大きさ



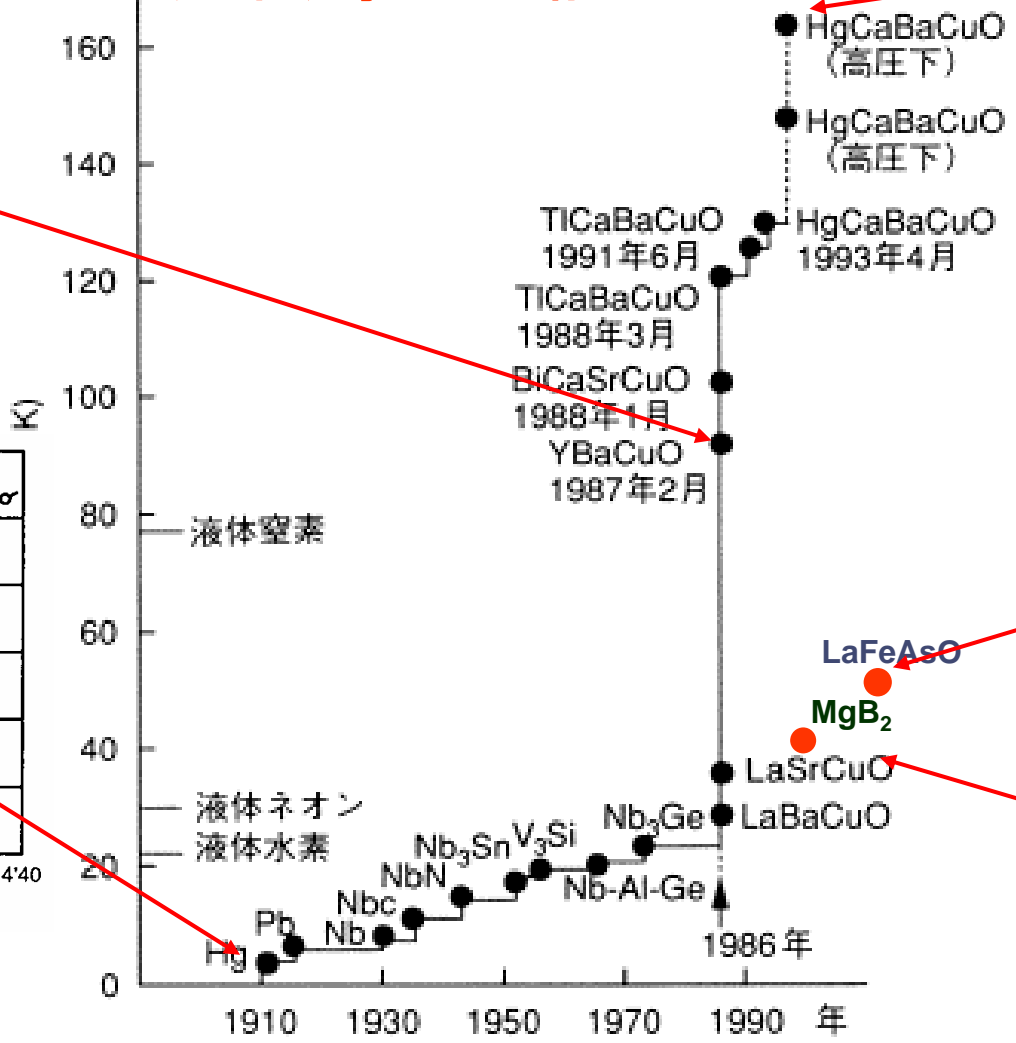
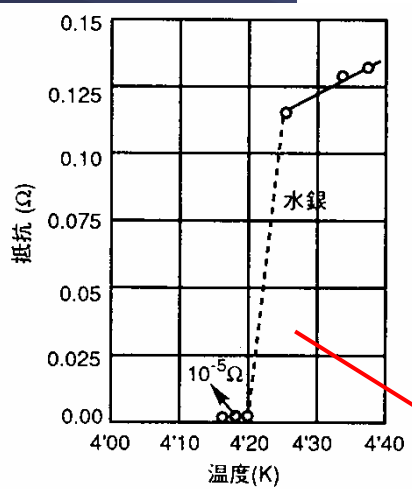
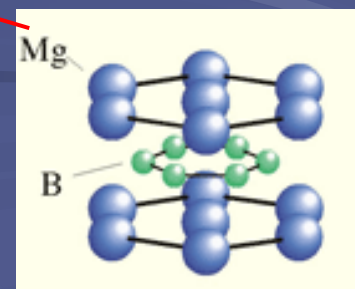
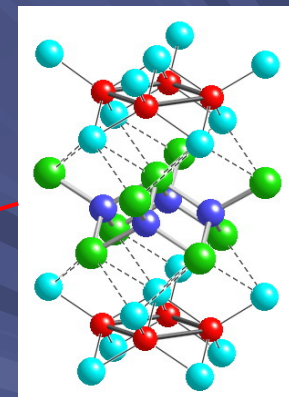
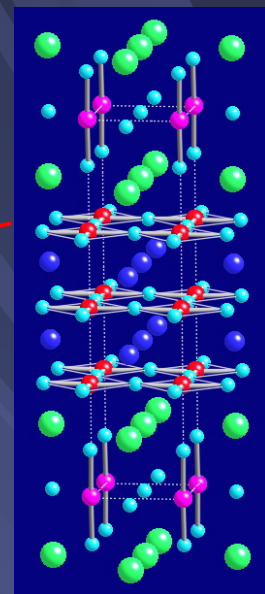
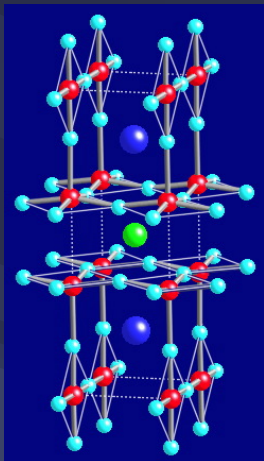
クーパー対は互いに  
重なり合っている



通常の分子の場合、  
分子の大きさは粒子  
間距離よりも小さい

# 超伝導転移温度の変遷

## 室温超伝導は可能か？



# 第6回： 奇妙な量子の世界

- 量子論の成立
- 量子力学のサワリ
- 量子干渉
- 巨視的量子現象
  - ボース凝縮
  - 超流動
  - 超伝導

