



東葛テクノプラザ夏休み科学教室

# 円周率に挑戦！

東京大学物性研究所

家 泰弘

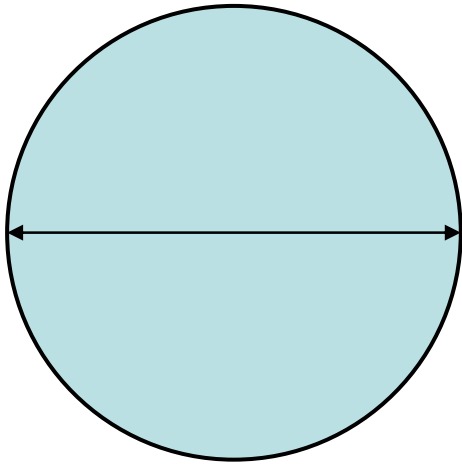
円周率について

円周率を求めるさまざまな方法  
でたらめな数(乱数)について





# 円周率ってなに？

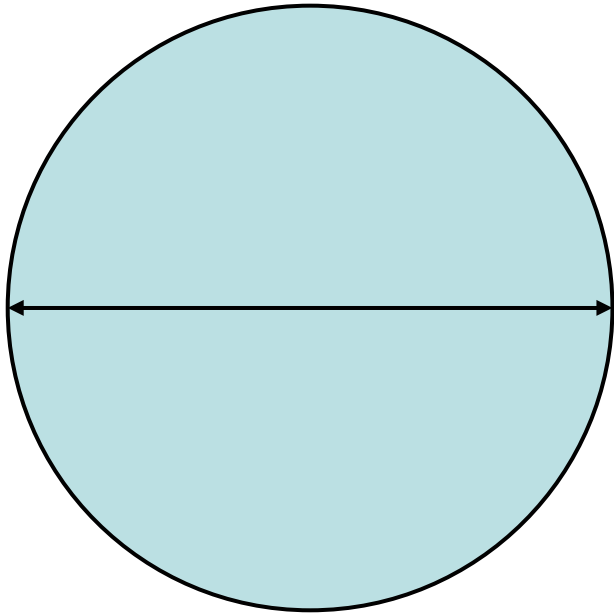


円周と直径の比 およそ 3.14

数学では円周率をギリシャ文字の  $\pi$  (パイ) で表す  
「円周」を表す  $\pi$ εριφερειαの頭文字をとったもの

= 3.141592653589793238462643385028841971...  
... と無限に続く

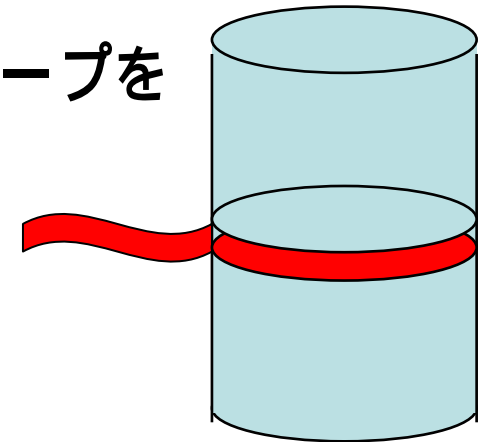
# 円周率を求めてみよう (1)



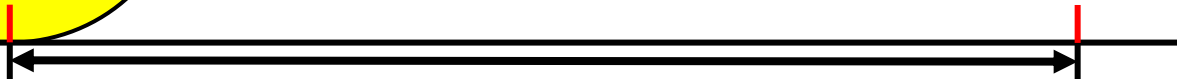
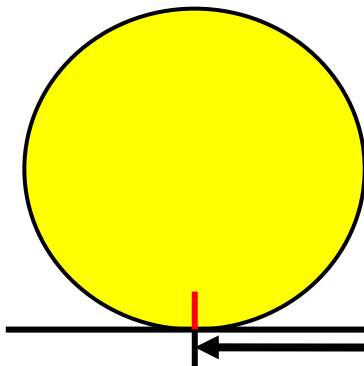
$$\text{円周率} = \text{円周} \div \text{直径}$$

丸いものの直径と円周を測ってみる

(1) 丸いものにテープを  
巻きつける

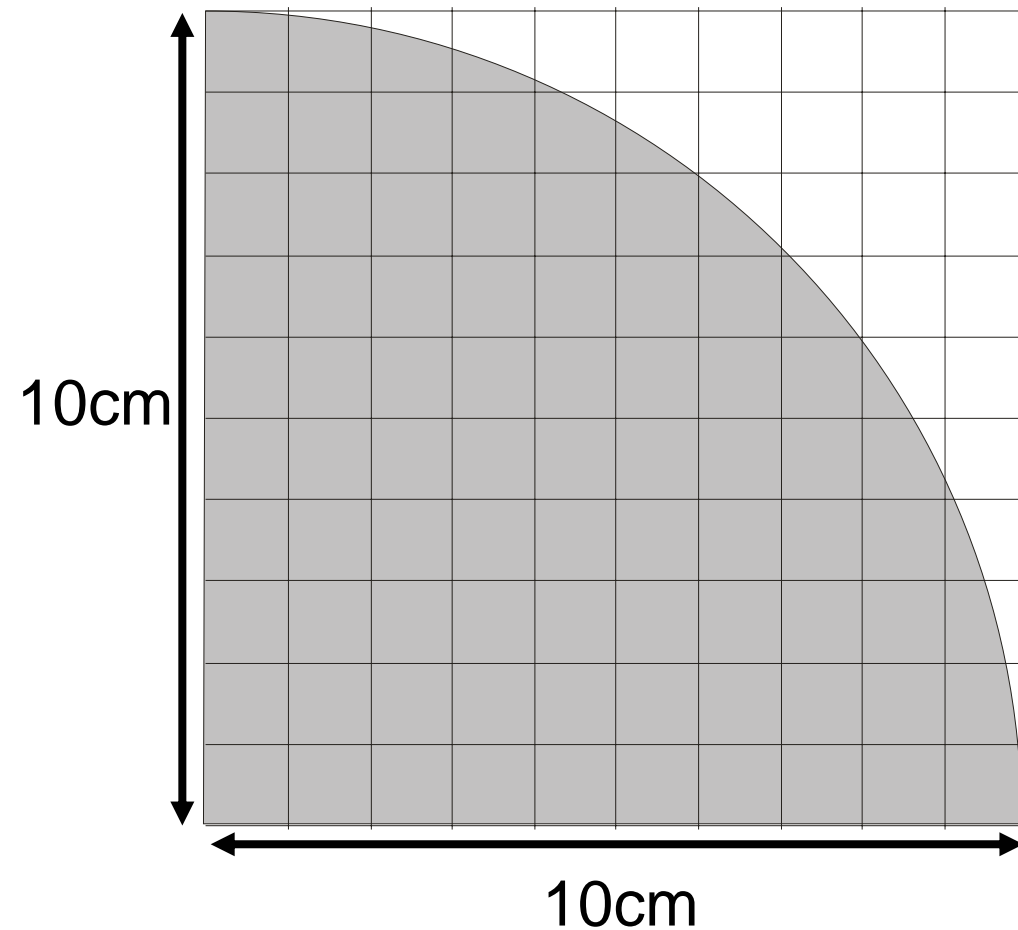


丸いものを転がす





# 円周率を求めてみよう (2)



円の面積 = 半径 × 半径 ×

方眼紙に半径10cmの円を描く(4分の1)

円の中に全部入っている  
升目の数を数える.

一部だけ円の中に入っ  
ている升目は0.5と数える

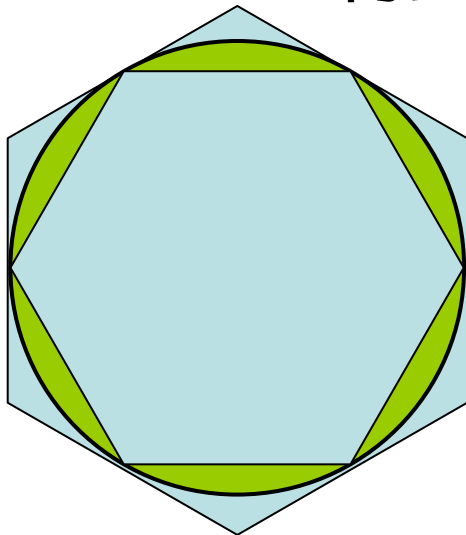
# 円周率の計算(1)

古代エジプト人は円周率がだいたい  $\frac{22}{7}$  くらい  
であることを知っていた

$$\frac{22}{7} = 3.1428\dots, \quad \frac{157}{50} = 3.14, \quad \frac{355}{113} = 3.1415929\dots$$

古代ギリシャのアルキメデス(BC287? ~ 212年)

円に内接する正多角形と外接する正多角形で挟む



正六角形でやってみると  $3 < \pi < 3.46$

6 12 24 48 96と増やしてゆく.

正96角形の計算から  $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$

$$3.1408 < \pi < 3.1428$$



# 円周率の計算 (2)

アル = カーシー(ペルシャ)(1429年ころ)  
正805306368( $3 \cdot 2^{28}$ )角形の辺の長さを計算して  
16桁まで求めた.

ルドルフ(1540-1610)  
正4611686018427387904( $2^{62}$ )角形の面積を計算して  
35桁まで求めた. ドイツでは円周率を「ルドルフの数」という

日本では  
関孝和(1642? ~ 1708年) 江戸時代の和算家  
正131072角形の周まで 計算して  
3.14159265359に微かに足りないと結論している



# 円周率の計算 (3)

シャンクス(1812-1882) : 一生かかって707桁まで計算したが  
後に528桁目に間違いが見つかった

3.

1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510  
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679 : 100桁  
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128  
4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196 : 200桁  
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091  
4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273 : 300桁  
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436  
7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094 : 400桁  
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548  
0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912 : 500桁  
9833673362 4406566430 8602139501 6092448077 2309436285  
5309662027 5569397986 9502224749 9620607497 0304123668 : 600桁  
8619951100 8920238377 0213141694 1190298858 2544681639  
7999046597 0008170029 6312377381 3420841307 9145118398 : 700桁  
0570985 : 707桁      正しいのは527桁まで

# 円周率の計算 (4)

数式を使っでの計算

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \quad \text{ライプニッツの公式}$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \quad \text{マチンの公式}$$

現代ではスーパーコンピューターを使って計算する  
現在の世界記録は **2061 億 5843 万桁**  
(東京大学情報基盤センターの金田康正教授)

1秒間に1兆回も計算する計算機で37時間かかって計算  
スーパーコンピューターの計算スピードのテストとして使われる



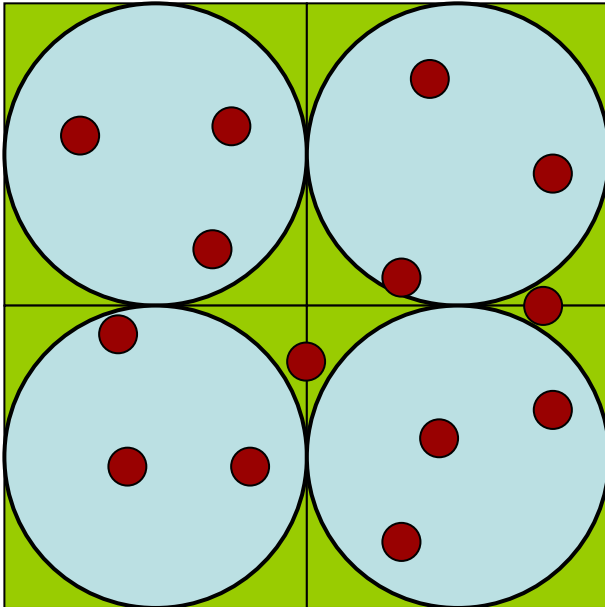


1万桁

PI=3.

1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679 8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128  
4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196 4422810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091 4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273  
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436 7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094 3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548  
0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912 9836673362 4406566430 8602139494 6359224737 1907021798 6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132  
0005681271 4526356082 7785713242 7577896091 7363717872 1468440901 2249534301 4654985837 10507922719 6892589235 4201995611 2129021960 8640344181 5981362974 77741309960  
5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859 5024459455 3469083026 4252230825 3344685035 2619311881 7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303  
5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778 1857780532 1172268066 1300192787 6611195909 2164201989 3809525720 1065485863 2788659361 5338182796 8230301952  
0353018529 6899577362 2599413891 2497217752 8347913151 5574857242 4541506959 5082953311 6861727855 8890750983 8175463746 4939319255 0604009277 0167113900 9848824012  
5853616035 6370719610 4710181942 9555961989 4676783744 4845855379 7747268471 0404753464 620846684 2590694912 9331367702 8989152104 7521620569 6602405803 8150193511  
2533824300 3558764024 7496473263 9141992726 0426992279 6782354781 6360093417 2164121992 4586315030 2861829745 5570674983 8505494588 5869269956 9092721079 7509302955  
3211653449 8720275596 0236480665 4991198818 3479775356 6369807426 5425278625 5181841757 4627890977 7727938000 8164706001 6145249192 1732172147 7235014144 1973568548  
1613611573 5255213347 5741849468 4385233239 0739414433 4537762416 8625189835 6948556209 9219222184 2725502542 5688767179 0494601653 4668049886 2732791798 6085784383  
8279679766 8145410095 3883786360 9506800642 2512520511 7392984896 0841284886 2694560424 1965285022 2106611863 0674427862 2039194945 0471237137 8696095636 4371917287  
4677646575 7396241389 0865832645 9958133904 7802759009 9065764078 9512694683 9835295570 9825862260 5224894077 2671947826 8482601476 9909026401 3639443745 5305068203  
4962524517 49393865143 1422809190 6592509372 2169646151 5948583387 4105978859 5977259754 8930161753 9284681382 686386894 2774155991 8599252459 5395943104 9972524680  
8459872736 4469584865 3836736222 6260991246 0805124388 4390451244 1365497627 8079771569 1435997700 1296160894 4169486855 5848406353 4220722258 2848864815 8456028506  
0168427394 5226746767 8895252138 5225499546 6672782398 6456596116 3548862305 7745649803 5593634568 1743241125 1507606947 9451096596 0940252288 7971089314 5669136867  
2287489405 6011015030 8617928680 9208747609 1782493858 9009714909 6759852613 6554978189 3129784821 6829989487 2265880485 7564014270 4775551323 796445152 3746234364  
5428584447 9526586782 1051141354 7357395231 1342716610 2135969536 2314429524 8493718711 0145764503 5902799344 0374200731 0578539062 1983874478 08474848968 3321445713  
6867519435 0643021845 3191048481 0053706146 8067491927 8191197939 9520614196 6342875444 0643745123 7181921799 9839101591 9561814675 1426912397 4894090718 6494231961  
5679452080 9514655022 5231603881 9301420937 6213785595 6389937787 0830309672 9207734672 2182562599 6615014215 0306803844 7734549202 6054146659 2520149744 2850732518  
6660021324 3408819071 0486331734 6496514539 0579626856 1005508106 6587969981 6357437638 4052571459 1028970641 1011097120 6280439039 7591556771 5770042033 7869936007  
2305587631 7635942187 3125147120 5329281918 2618612586 7321579198 4148488291 6447060957 5270695722 0917567116 7229109816 9091528017 3506712748 5832228718 3520935396  
5725212183 5791513698 8209144421 0067510334 6711031412 6711136990 8658516398 3150197016 5151168517 1437657618 3515565088 4909989859 9928373455 8233163550 76479186535  
8932261854 8963213293 3089885706 2046752590 7091548141 6549895461 6371802079 8199430992 4488957571 2828905923 2332609725 3732654893 2839119325 9746386730  
5836041428 1388303203 8249037589 8524374417 0291327656 1809377344 4030707469 2112019130 2033038019 7621101100 4492932151 6084244485 9637669838 9522868478 3123552658  
2131449576 8572624334 4189303968 6426243410 7732269780 2807318915 4411010446 8232527162 0105265227 2111660396 6655730925 4711055785 3763466820 6531098965 2691862056  
4769312570 5863566201 8558100729 6406598764 8611791045 3348850346 1136576867 5324944166 8039626579 7877185560 8455296541 2665408530 6143444318 5867697514 5661406800  
7002378776 5913440171 2749470420 5622305389 9456131407 1127000407 8547332699 3908145466 46345880739 2708266300 63403285878 5698305235 8089330657 5740679545 7163775254  
2021149557 6158140025 0126228594 1302164715 5097925923 0990796547 3761255176 5675135751 7829666454 7791745011 2996148903 0463994713 2962107340 4375189573 5961458901  
9389713111 7904297828 5647503203 1986915140 2870808599 0480109412 1472213179 4764777262 2414254854 5403321571 8530614228 8137585043 0633217518 2979866223 7172159160  
7716692547 4873898665 4949450114 6540628433 6639379003 9769265672 1463853067 3609657120 9148076382 7166416274 8888007869 2560290228 4721040317 2118608204 1900042296  
6171196377 9213375751 1495950156 6049631862 9472654736 4252308177 0367515906 7350235072 8354056704 0386743513 6222247715 8915049530 9844489333 0963408780 7693259939  
7805419341 4473774418 4263129860 8099888687 4132604721 5695162396 5864573021 6315981931 9516735381 2974167729 4786724229 2465436680 0980676928 2382806899 6400482435  
4037014146 1496589794 0924323789 6907069779 4223625082 2168895738 3798623001 5937764716 5122893578 6015881617 5578297352 3344604281 5126272037 3431465319 7777416033  
9906655418 7639792933 4419521541 3418994854 4473456738 3162499341 9131814809 2777710386 3877343177 2075456545 3220777092 1201905166 0962804099 2636019759 8828161332  
3166636528 6193266863 3606273567 6303544776 2803504507 7723554710 5859548702 7908143562 4014517180 6246436267 9456127531 8134078330 3362542327 8394497538 2437205835  
3114771199 2606381334 6776879695 9703098339 1307710987 0408591337 4641448222 7726346594 7047458784 7787201927 7152807177 6790770175 7213444730 6057003340 9243693113  
8350493163 1284042512 1925651798 0694113528 0131470130 4781643788 5185290928 5452011658 3934196562 1349143415 9562586586 5570552690 4965209858 0338507224 2648293972  
8584783163 0577775606 8887644624 8246857926 0395352773 4803048029 0058760758 2510474709 1643961362 6760449256 2742042083 2085661190 6254543372 1315359584 5068772460  
2901618766 7952406163 4252257719 5429162991 9306455377 4914037340 4328752628 8896395987 9475291714 6426337545 2540790914 5135711132 9410911939 3251910760 2802520261  
8798531887 7058429725 9167781314 9699009019 2116971737 2784768472 6860843063 3770242429 1651300500 5168323364 3503895170 2989399620 4517220138 2280696501 1784408745  
1960121228 5993716231 3017114448 4640903890 6449544400 6198690754 8516026327 5052983491 8740786680 8818338510 2283345085 0486082503 9302133219 7155184306 3545500766  
8282949304 1377655279 3975175461 3953984683 3936383047 4611996653 8581538420 5685338621 8672523340 2830871123 2827892125 0771262946 3229563989 8989358211 6745627010  
2183564622 0134967151 8819097303 8119800497 3407239610 3685406643 1939509790 1906996395 5245300545 0580685501 9567302292 1913939319 5298305300 9820595110 0226353536  
1920419947 4553859381 0234395544 9597783779 0237421617 27111172364 3435439478 2218185286 2465814006 66044433258 8869686705 4315470696 5747458550 5332323421 0730154594  
0516553790 6866273337 9958511562 5784322988 2737231989 8757141595 7811196358 3300594087 3068121602 8764962867 4460477464 9159950549 7374256269 0104903778 1986835938  
1465741468 0492564879 8556145372 3478673303 9046883834 3634655379 4986419270 5638729317 4872332083 76011123029 9113679386 2708943879 9362016295 1541337142 4892830722  
01269011275 4668476535 7616447379 4675200490 7571555278 1965662132 3926406160 1363581559 0742202020 3187277605 2772190055 6148425551 8792530343 5139844253 22423157623  
3610642506 3904975008 6562710953 5919465897 5141310348 2276930624 7435363256 9160781547 8181152843 6679570611 0861533150 4452127473 9245449454 2368288606 1340841486  
3776700961 2071512491 4043027253 8607648236 3414346263 5189757664 5216413767 96903314950 1910857598 4423919862 9164219399 4907326234 6468441173 94430265918 4044378051  
3338945257 4239950829 6591228508 5558215725 0310712570 1266830440 2929525220 1187267675 6220045520 5161841634 8647565169 981164101 0029960783 8690929160 30288940026  
9104140792 8862150784 2451670908 7000699282 1206604183 7180653556 7252532567 5328612910 4248776182 5829765157 9598470356 2226293486 0034158722 9805349896 5022629174  
8788202734 2092222453 3985626476 6914905562 8425039127 5771028402 7998066365 8254889264 8802545661 0172967026 6407655904 2909945681 5065265305 3718294127 0336931378  
5178609400 7086671149 6558343434 7693385781 7113864558 3763812301 4587687126 6034891390 9562009939 3610310291 6161528813 8437909094 2317473363 9480457593 1493140529  
763457481 1935670911 0137751721 080315590 2485309066 90203767192 2033229094 3346768514 2214477399 3937517034 4366199104 0337511173 5471918550 4644902636 5512816228  
8244625759 1633303910 7225383742 1821408835 0865739177 1509682887 4782656995 9957449066 1758344137 5223970968 3408005355 9849175417 3818839994 4697486762 6551658276  
5848358845 3142775687 9002909517 0283529716 3445621296 4043523117 2006651012 4120065975 5851276178 5838292041 9748442360 8007193045 7618932349 2292796501 9875187212  
7267507981 2554709589 0456563792 1221033346 6974992356 3025494780 24906114195 2123828153 0911407907 3860251522 7429958180 7247162591 668451333 1239480494 707919153  
2673430282 4418604142 6363954800 0448002670 4962482017 9289647669 7583183271 3142517029 6923488962 7668440323 2609275249 6035799646 9256504936 8183609003 2380929345

# 円周率を求めてみよう (3)



$$\text{円の面積} = \text{半径} \times \text{半径} \times \\ =$$

$$\text{正方形の面積} = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{面積の比} = \quad / 4$$

方眼紙に半径5 cmの円を, 互いに接するように描く.

ここに小豆の粒をでたらめに落として,

(A) 円の中に落ちた粒の数

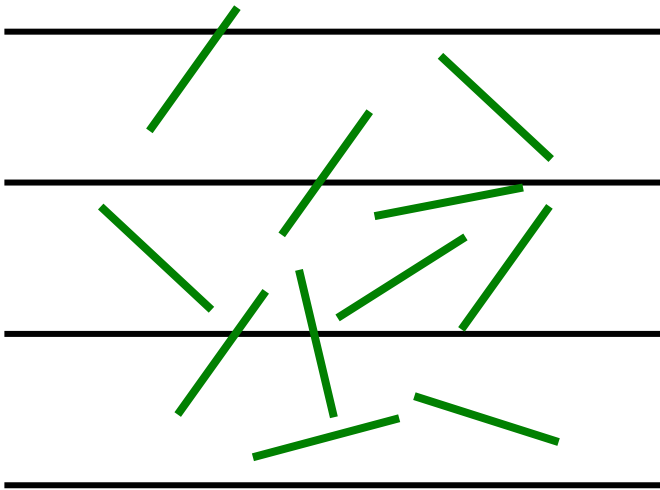
(B) 四角の中で円の外に落ちた粒の数

をそれぞれ数える.

(Aの数) ÷ (Aの数 + Bの数) を計算する



# 円周率を求めてみよう (4)



## ビュッフォンの針

方眼紙にマッチ棒の長さと同じ間隔の直線を引く

ここにマッチ棒をでたらめに落として,

(A) どれかの線に触れた場合の数

(B) どの線にも触れなかった場合の数

をそれぞれ数える

(Aの数) ÷ (Aの数 + Bの数) を計算すると

これが  $2 \div \text{円周率} = 0.64$  程度になる



# 確率事象

ここでやった実験は, 小豆の粒やマッチ棒が  
全く「でたらめ」に落ちることを前提にしていた.

「確率事象」「ランダム現象」という

小豆の粒がどこに落ちるのも同じ確率  
マッチ棒がどこにどういう角度で落ちるかも同じ確率

サイコロを振る  
コインを投げて表か裏かを見る

トランプをよく切る



# でたらめな数 (乱数)

(1) 0 から 9 までの数字をでたらめになるように 100 個ならべて書く.

例: 375018392...

お子さんとお母さんがそれぞれひとつずつ作る.

100 個の数字をならべたものができたら, それを交換する.

(2) 100 個の数字の中に 0 が何回, 1 が何回, ..., 9 が何回現れたかを数えて表にする.

0        \_\_\_ 回

1        \_\_\_ 回

2        \_\_\_ 回

.....

9        \_\_\_ 回

(3) 次に, 00 とか 11 というように同じ数字が連続するのが何回現れたかを数えて表にする.

00        \_\_\_ 回

11        \_\_\_ 回

22        \_\_\_ 回

.....

99        \_\_\_ 回



# 乱数について

本当の乱数(全く規則性の無い数字の列)をつくるのは結構難しい。

特定の数字が他の数字よりも多く現れるようでは乱数ではない

0から9までの数字が均等に現れる(全体の1/10ずつ)ことが必要  
(ただし,全体が100個の場合にきっちり10個ずつというわけではない)

均等といっても,000222999777666444555111333888ではダメ

14285769031428576903...というような繰り返しもダメ

たとえば「1の次には8が来ることが多い」というような規則性があってはダメ



# 乱数について

本当の乱数(全く規則性の無い数字の列)をつくるのは結構難しい.

0 から 9 までの数字が均等に現れる (全体の  $1/10$  ずつ)

ある数字の次になにが来るかはその数字には依らない  
たとえば 1 の次に 0 が来る割合も, 1 が来る割合も同じ

100 個の数字があると 00, 11, 22, ... など同じ数字が続けて現れる  
場合がそれぞれ平均として 1 回程度はある.

同じ数字 3 つが続けて現れる場合も平均して 1 回程度はある.



# 30人以上の人が集まると

誕生日が同じという人がたいてい一組はいる。

2人目の人が1人目の人と違う誕生日である確率は  $\frac{364}{365}$

3人目の人が1人目とも2人目とも違う誕生日である確率は  $\frac{363}{365}$

23人のとき全員がそれぞれ違う誕生日である確率は

$$\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \frac{361}{365} \times \cdots \times \frac{344}{365} \times \frac{343}{365} = 0.493$$

つまり, 少なくとも2人が同じ誕生日である確率は約50%.

これが40人になると, 約90%以上の確率で同じ誕生日の人がいる





# 円周率の最初の500桁を見てみると

3.

14159265358979323846264**33**83279502**88**41971693**99**37510  
58209749**44**592307816406286208**99**8628034825342**11**70679 : 6回

8214808651328230**66**470938**44**609**55**058**22**31725359408128  
48**111**745028410270193852**11**0**555**96**44**6**22**94895493038196 : 11回

**44**2**88**10975**66**59**33**4461284756482**33**7867831652712019091  
456485**66**92346034861045432**66**4821**33**93607260249141273 : 9回

724587**00**660631**55**88174**88**152092096282925409171536436  
789259036**00**1**133**053054**88**204**66**5213841469519415**11**6094 : 10回

**33**057270365759591953092186**11**73819326**11**793105**11**8548  
07**44**6237**99**62749567351**88**5752724891**22**79381830**11**94912 : 9回



# 2000億桁までを見てみると

「0」 200,0003,0841	「1」 199,9991,4711	「2」 200,0013,6978	「3」 200,0006,9393
「4」 199,9992,1691	「5」 199,9991,7053	「6」 199,9988,1515	「7」 199,9996,7594
「8」 200,0029,1044	「9」 199,9986,9180		

2000,0000,0000

同じ数字が10個続けて現れる場合がほぼ確実にある。

01234567890: 小数点以下 532 億 1768 万 1704 桁目から

01234567890: 小数点以下 1484 億 2564 万 1592 桁目から

# 乱数はとても大切

## 「無作為抽出」による調査

たとえば選挙結果を予想するのに、有権者を無作為に選び出して意見の聴き取り調査をする。  
有権者全員を調べなくても、そのごく一部を調べれば全体の傾向が予想できる。

## シミュレーション

たとえば飛行機や自動車を設計する上で、風洞実験で空気の流れを調べるかわりに、コンピューターでそれに代わる数値実験(シミュレーション)を行う。



# 今日, 学んだこと

- 円周率は小数点以下無限につづく数  
現在では2000億桁まで計算されている
- 円周率を求めるいろいろな方法  
実際に測る  
実験から求める
- 乱数とはどういうものか